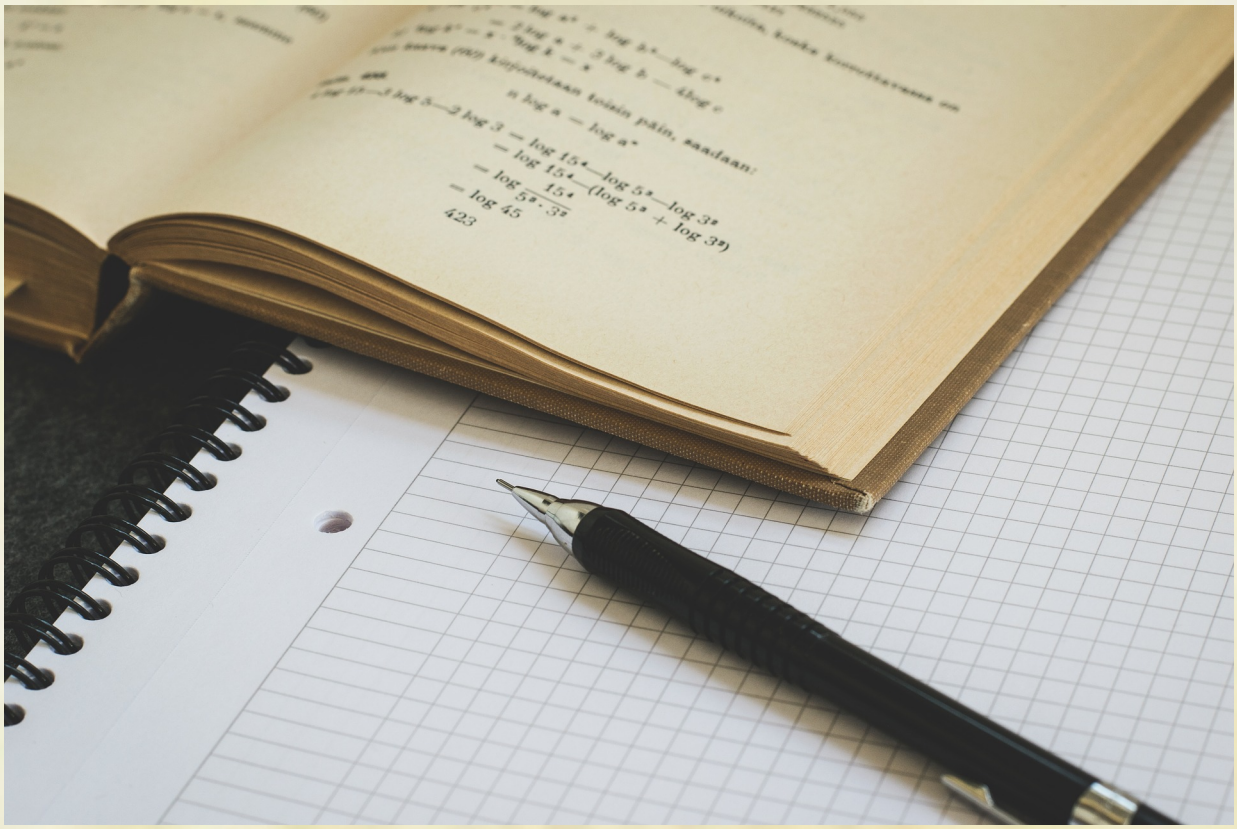
HUGO MATHS



SOMMAIRE

Arithmétique

Nombres relatifs

Fractions

Proportionnalité

Vitesse

Racine carrée

Puissances

Expressions littérales

Équations

Fonctions

Fonctions linéaires

Fonctions affines

Statistiques

Probabilités

Distances et périmètres

Aires

Volumes

Triangles

Quadrilatères

Transformations

- Symétrie axiale
- Symétrie centrale
- Translation
- Rotation

Agrandissement – réduction

Homothéties

Théorème de Pythagore

Théorème de Thalès

Triangles semblables

Trigonométrie

Utiliser la calculatrice CASIO

Arithmétique

La division euclidienne

Voici la division euclidienne de 318 par 12 :

$$\begin{array}{rrr|rr} & 3 & 1 & 8 & \multicolumn{2}{l}{\;\;1\;\;2} \\ \cline{6-7} - & 2 & 4 & & \multicolumn{2}{l}{\;\;2\;\;6} \\ \cline{1-4} & & 7 & 8 & & \\ - & 7 & 2 & & & \\ \cline{2-4} & & & 6 & & \end{array}$$

318 s'appelle le dividende et 12 s'appelle le diviseur.
26 est le plus grand nombre de fois que 12 est contenu dans 318.
On dit que 26 est le quotient entier de la division euclidienne de 318 par 12.
Le reste de cette division est 6. Ce reste doit être inférieur au diviseur.
$318 = 26 \times 12 + 6$ avec $6 < 12$

Multiples et diviseurs

$54 = 18 \times 3$. Le reste de la division euclidienne de 54 par 3 est 0.

54 est un **multiple** de 3
54 se trouve dans la table de multiplication de 3
54 est **divisible** par 3
3 est un **diviseur** de 54

Diviseurs de 36 :

$36 = 1 \times 36$
$36 = 2 \times 18$
$36 = 3 \times 18$
$36 = 4 \times 9$
$36 = 6 \times 6$

36 a donc 9 diviseurs : 1 / 2 / 3 / 4 / 6 / 9 / 12 / 18 / 36

Critères de divisibilité

Si un nombre entier a pour chiffre des unités 0 ; 2 ; 4 ; 6 ou 8, alors il est divisible par 2.

Si un nombre entier a pour chiffre des unités 0 ou 5, alors il est divisible par 5.

Si un nombre entier a pour chiffre des unités 0, alors il est divisible par 10.

Si les deux derniers chiffres d'un nombre est divisible par 4, alors il est divisible par 4.

Si la somme des chiffres d'un nombre entier est divisible par 3, alors ce nombre est divisible par 3.

Si la somme des chiffres d'un nombre entier est divisible par 9, alors ce nombre est divisible par 9.

Nombres premiers

Un nombre premier est un nombre qui n'admet que 2 diviseurs : 1 et lui-même

Exemples :
18 est divisible par 2, il possède donc au moins 3 diviseurs : 18 n'est donc pas premier.
23 possède exactement deux diviseurs (1 et 23) : 23 est donc premier.
1 possède un unique diviseur (lui-même) : 1 n'est donc pas premier.

On admet qu'il existe une infinité de nombres premiers.

Liste des diviseurs inférieurs à 100 :

2 / 3 / 5 / 7 / 11 / 13 / 17 / 19 / 23 / 29 / 31 / 37 / 41 /

43 / 47 / 53 / 59 / 61 / 67 / 71 / 73 /79 / 83 / 89 / 97.

Propriété
Tout nombre entier peut s'écrire sous la forme d'un produit de nombres premiers

Exemples :
$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$ $\quad$ $15 = 3 \times 5$ $\quad$ $30 = 2 \times 3 \times 5$ $\quad$ $68 = 2 \times 2 \times 17$

Fractions irréductibles

Une fraction est dite irréductible lorsque le numérateur et le dénominateur n'ont pas de diviseur commun autre que 1.

Exemple :
Déterminer le fraction irréductible égale à $\dfrac{24}{68}$
On peut décomposer le numérateur et le dénominateur en produit de facteurs premiers.

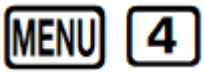
$$\frac{24}{68} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 3}{2 \times 2 \times 17} = \frac{2 \times 3}{17} = \frac{6}{17}$$

www.youtube.com/watch?v=2e_iZQ4cwF4

Calculatrice

Déterminer tous les diviseurs d'un nombre à l'aide de la calculatrice (casio)

Exemple : trouver tous les diviseurs de 60



(menu tableau ou menu table)

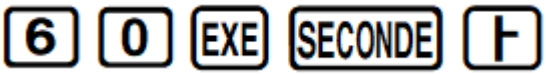
($f(x) = 60 \div x$)

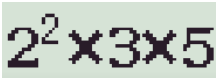
(début = 1 ; fin = 30 ; pas = 1)

Il ne reste plus qu'à recopier les diviseurs...

Décomposer un entier en un produit de facteurs premiers

Exemple : Décomposer 60 en un produit de facteurs premiers



La calculatrice affiche 

On a donc $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$

Nombres relatifs

Définition

Un nombre relatif est formé d'un signe + ou − et d'un nombre appelé distance à zéro.

Exemples :

(+8) est un nombre relatif
Son signe est +
Sa distance à zéro est 8

(−12) est un nombre relatif
Son signe est −
Sa distance à zéro est 12

Comparer deux nombres relatifs

De deux nombres positifs, le plus grand est celui qui a la plus grande distance à zéro

Exemples :

$(+17) > (+14)$ $\qquad$ $(+5) < (+19)$

De deux nombres de signes contraires, le plus grand est le nombre positif

Exemples :

$(-32) < (+9)$ $\qquad$ $(+23) > (-17)$

De deux nombres négatifs, le plus grand est celui qui a la plus petite distance à zéro

Exemples :

$(-34) < (-7)$ $\qquad$ $(-0,4) > (-12\ 498)$

Somme de deux nombres relatifs

La somme de deux nombres relatifs de même signe :

- **a pour signe le signe commun aux deux nombres**
- **a pour distance à zéro la somme des distances à zéro**

La somme de deux nombres positifs est un nombre positif.
La somme de deux nombres négatifs est un nombre négatif.

Exemples :

$(+5) + (+21) = +26$ $\qquad$ $(-7) + (-15) = (-22)$

La somme de deux nombres relatifs de signes contraires :

- **a pour signe le signe du nombre qui a la plus grande distance à zéro**
- **a pour distance à zéro la différence des distances à zéro**

Exemples :

$(+7) + (-18) = -11$ (c'est (-18) qui donne son signe et $18 - 7 = 11$)

$(+14) + (-9) = +5$ (c'est $(+14)$ qui donne son signe et $14 - 9 = 5$)

Différence de deux nombres relatifs

Soustraire un nombre, c'est ajouter son opposé

Exemples :

$(+8)$ s'est transformé en (-8)

$(+5) - (+8) = (+5) + (-8) = -3$

La soustraction s'est transformée en addition

(-20) s'est transformé en $(+20)$

$(-15) - (-20) = (-15) + (+20) = +5$

La soustraction s'est transformée en addition

Supprimer les parenthèses

Afin de simplifier l'écriture, on peut supprimer les parenthèses en respectant une règle :
La règle du « même plus » (et donc « pas même moins »)

$A = (+13) + (+14)$ Ici, 2 signes se suivent. Ce sont les <u>mêmes</u> signes.
Donc je les remplace par un « + »
$A = +13 + 14$
$A = +27$

$B = (+12) - (-30)$ Ici, 2 signes se suivent. Ce sont les <u>mêmes</u> signes.
Donc je les remplace par un « + »
$B = +12 + 30$
$B = +42$

$C = (-7) - (+10)$ Ici les deux signes qui se suivent sont <u>différents</u>
Donc je les remplace par un « - »
$C = -7 - 10$
$C = -17$

Organiser un calcul

$A = (+12) + (-7) - (-28) - (+10) + 15$ On supprime les parenthèses
$A = +12 - 7 + 28 - 10 + 15$ et on remplace les doubles signes par un seul
$A = +12-7+28-10+15$ On repère les nombres **positifs** et négatifs
$A = +12+28+15-10-7$ On les rassemble par signe
$A = +55-17$ On additionne les positifs et on additionne les négatifs
$A = +38$

Multiplication de deux nombres relatifs

Le produit de deux nombres relatifs de même signe est positif
Le produit de deux nombres relatifs de signes contraires est négatif

Pour calculer le produit de deux nombres relatifs :

- On détermine son signe avec la règle des signes
- On multiplie les distances à zéro des deux nombres

Exemples :
$(+4) \times (+11) = +44$ $(-7) \times (+2) = -14$
$(-5) \times (-7) = +35$ $(+8) \times (-8) = -64$

Conséquence : Le carré d'un nombre est toujours **positif**
$(+6)^2 = +36$ $(-3)^2 = +9$

Multiplication de plusieurs décimaux relatifs

Pour multiplier plusieurs nombres relatifs, on multiplie les distances à zéro et on compte le nombre de facteurs négatifs

Si ce nombre est pair, le produit est positif
Si ce nombre est impair, le produit est négatif

Exemples :
$(-2) \times (-3) \times (+2) \times (-5) \times (+2) \times (-1)$
Il y a ***quatre*** facteurs négatifs donc le produit est **positif**
$(-5) \times (+2) \times (-5) \times (+2) \times (-5)$
Il y a ***trois*** facteurs négatifs donc le produit est **négatif**

Division de deux décimaux relatifs

Pour diviser deux décimaux relatifs, on divise les distances à zéro et on applique la même règle des signes que pour la multiplication.
Exemples :

$(-280) \div 7 = \dfrac{-280}{7} = -40$ $-48 \div (-6) = \dfrac{-48}{-6} = +8$

Enchaînements d'opérations

Pour calculer une expression, on effectue:

- les carrés, les cubes, etc.,
- les calculs entre parenthèses,
- les multiplications et les divisions,
- et enfin les additions et les soustractions.

Exemples :

$A = 13 + 5 \times (3 - 11) - 7$
$A = 13 + 5 \times (-8) - 7$
$A = 13 - 40 - 7$
$A = 13 - 47$
$A = -34$

$B = 7 - 3 \times 4^2 + 11$
$B = 7 - 3 \times 16 + 11$
$B = 7 - 48 + 11$
$B = 7 + 11 - 48$
$B = 18 - 48$
$B = -30$

Fractions

Écriture fractionnaire

Soit a et b deux nombres, b étant différents de zéro.

$\frac{a}{b}$ est une écriture fractionnaire d'un nombre. a est le numérateur et b est le dénominateur.

$\frac{a}{b}$ est le quotient de a par b. $\frac{a}{b} = a \div b$

Le quotient de deux nombres entiers est une fraction.

Exemples :

$\frac{4}{5}$ est une écriture fractionnaire d'un nombre.

L'écriture décimale de ce nombre est 0,8

$\frac{7}{3}$ est une écriture fractionnaire d'un nombre.
Ce nombre n'a pas d'écriture décimale : $7 \div 3 \approx 2,33333333...$

Fractions égales

Un nombre en écriture fractionnaire ne change pas quand on multiplie ou quand on divise son numérateur et son dénominateur par un même nombre non nul.

Exemples :

$\frac{4}{5} = \frac{8}{10} = \frac{12}{15} = \frac{16}{20} = \frac{20}{25}$ $\qquad$ $\frac{7}{3} = \frac{14}{6} = \frac{21}{9} = \frac{28}{12} = \frac{35}{15}$

Simplifier une fraction

Simplifier une fraction, c'est trouver une fraction qui lui est égale et qui s'écrit avec un numérateur et un dénominateur plus petit.

Exemples : Simplifier les fractions suivantes.

$A = \frac{12}{22}$ $\qquad$ $B = \frac{14}{35}$ $\qquad$ $C = \frac{40}{55}$

$A = \frac{2 \times 6}{2 \times 11}$ $\qquad$ $B = \frac{7 \times 2}{7 \times 5}$ $\qquad$ $C = \frac{5 \times 8}{5 \times 11}$

$A = \frac{6}{11}$ $\qquad$ $B = \frac{2}{5}$ $\qquad$ $C = \frac{8}{11}$

Additions et soustractions

Pour calculer la somme (ou la différence) de deux fractions de même dénominateurs :

$$\begin{cases} \text{On additionne (ou on soustrait) les numérateurs} \\ \\ \text{On garde le dénominateur commun} \end{cases}$$

<u>Exemples :</u>

$A = \dfrac{2}{15} + \dfrac{7}{15}$

$A = \dfrac{9}{15}$

$A = \dfrac{3 \times 3}{3 \times 5}$

$A = \dfrac{3}{5}$

$B = \dfrac{44}{45} - \dfrac{4}{45}$

$B = \dfrac{40}{45}$

$B = \dfrac{8 \times 5}{9 \times 5}$

$B = \dfrac{8}{9}$

Lorsque les dénominateurs sont différents, on écrit des fractions qui sont égales aux fractions données et qui ont le même dénominateur.

$C = \dfrac{2}{7} + \dfrac{5}{21}$

$C = \dfrac{2 \times 3}{7 \times 3} + \dfrac{5}{21}$

$C = \dfrac{6}{21} + \dfrac{5}{21}$

$C = \dfrac{11}{21}$

$D = \dfrac{35}{10} - \dfrac{4}{5}$

$D = \dfrac{35}{10} - \dfrac{4 \times 2}{5 \times 2}$

$D = \dfrac{35}{10} - \dfrac{8}{10}$

$D = \dfrac{27}{10}$

Produit de deux fractions

Pour calculer le produit de deux fractions, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.
Il n'est donc pas nécessaire que les fractions aient le même dénominateur.

Exemples :

$$E = \frac{2}{9} \times \frac{5}{7}$$

$$E = \frac{2 \times 5}{9 \times 7}$$

$$E = \frac{10}{63}$$

$$F = \frac{21}{18} \times \frac{27}{35}$$

$$F = \frac{21 \times 27}{18 \times 35}$$

$$F = \frac{3 \times 7 \times 3 \times 9}{2 \times 9 \times 7 \times 5}$$

$$F = \frac{3 \times 3}{2 \times 5}$$

$$F = \frac{9}{10}$$

Inverse d'un nombre

Deux nombres sont inverses l'un de l'autre si leur produit est égal à 1.

Tout nombre x non nul admet un inverse (noté x^{-1}) qui est le nombre $\frac{1}{x}$.
Tout nombre en écriture fractionnaire $\frac{a}{b}$ ($a \neq 0$ et $b \neq 0$) admet un inverse qui est le nombre $\frac{b}{a}$.

Remarques :

Zéro est le seul nombre qui n'admet pas d'inverse.
Un nombre et son inverse ont toujours le même signe.
L'inverse de l'inverse d'un nombre est ce nombre lui-même.

Exemple :

L'inverse de 3 est $3^{-1} = \frac{1}{3}$

L'inverse de $\frac{-7}{3}$ est $\frac{1}{\frac{-7}{3}} = \frac{3}{-7} = \frac{-3}{7}$

Diviser

Diviser par un nombre non nul, c'est multiplier par son inverse.

Exemples :

$$G = \frac{8}{7} \div \frac{5}{3}$$

$$G = \frac{8}{7} \times \frac{3}{5}$$

$$G = \frac{8 \times 3}{7 \times 5}$$

$$G = \frac{24}{35}$$

$$H = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{9}}$$

$$H = \frac{3}{4} \div \frac{2}{9}$$

$$H = \frac{3}{4} \times \frac{9}{2}$$

$$H = \frac{3 \times 9}{4 \times 2}$$

$$H = \frac{27}{8}$$

$$I = \frac{2}{7} + \frac{3}{5} \div \frac{7}{6}$$

$$I = \frac{2}{7} + \frac{3}{5} \times \frac{6}{7}$$

$$I = \frac{2}{7} + \frac{3 \times 6}{5 \times 7}$$

$$I = \frac{2}{7} + \frac{18}{35}$$

$$I = \frac{2 \times 5}{7 \times 5} + \frac{18}{35}$$

$$I = \frac{10}{35} + \frac{18}{35}$$

$$I = \frac{28}{35}$$

$$I = \frac{7 \times 4}{7 \times 5}$$

$$I = \frac{4}{5}$$

Proportionnalité

Définition

Deux grandeurs sont dites proportionnelles si on passe des valeurs de l'une aux valeurs de l'autre en multipliant toujours par le même nombre, appelé coefficient de proportionnalité.

On présente souvent les situations de proportionnalité à l'aide d'un tableau.
Par exemple :

Grandeur n°1	5	11
Grandeur n°2	12	24,2

×2,2

$$\frac{12}{5} = \frac{24,2}{11} = 2,2$$

Ce tableau est un tableau de proportionnalité, et le coefficient de proportionnalité est égal à 2,2.

Reconnaître un tableau de proportionnalité

Pour savoir si un tableau est un tableau de proportionnalité, il suffit de diviser les nombres de la ligne du bas par ceux de la ligne du haut. Si on obtient à chaque fois le même résultat, le tableau est un tableau de proportionnalité et ce nombre sera le coefficient de proportionnalité.

Exemple :

2	5	9	15
3,4	8,5	15,3	25,5

$\frac{3,4}{2} = 1,7$ $\quad$ $\frac{8,5}{5} = 1,7$ $\quad$ $\frac{15,3}{9} = 1,7$ $\quad$ $\frac{25,5}{15} = 1,7$

Ce tableau est un tableau de proportionnalité et son coefficient est **1,7**.
On passe de la première ligne à la deuxième en multipliant tous les nombres par **1,7**.

Compléter un tableau de proportionnalité sans connaître le coefficient.

2	7	10	30
5,4			

1ère étape : Il faut déterminer ce coefficient de proportionnalité : $\frac{ligne\ du\ bas}{ligne\ du\ haut}$

Dans notre exemple : $k = \frac{5,4}{2} = 2,7$

2ème étape : On complète le tableau.

2	7	10	30

X 2,7

5,4	18,9	27	81

Résoudre un problème de proportionnalité

Il existe différentes méthode pour résoudre un problème de proportionnalité.
Voici une de ces méthodes...

Exercice résolu

Annabelle a acheté des enveloppes identiques. 12 enveloppes pèsent 240 g.
Quelle est la masse de 27 de ces enveloppes ?

1ère étape : On trace un tableau de trois colonnes et 2 lignes.
2ème étape : Dans la première colonne, on place les grandeurs (nombre d'enveloppes et masse en grammes)
3ème étape : Dans la deuxième colonne, on place ce que l'on sait (12 enveloppes pèsent 240 g)
4ème étape : Dans la troisième colonne, on complète par la question (27 enveloppes)

Ce qui nous donne :

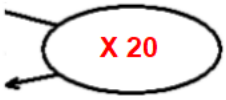
Nombre d'enveloppe	12	27
Masse (en g)	240	??

5ème étape : Je détermine le coefficient de proportionnalité

$k = 240 \div 12 = 20$

6ème étape : Je calcule la masse de 27 enveloppes : $27 \times 20 = 540\ g$

Nombre d'enveloppe	12	27
Masse (en g)	240	540



7ème étape : Je réponds à la question

La masse de 27 enveloppes est 540 grammes.

Quatrième proportionnelle (produit en croix)

Dans un tableau de proportionnalité dont on connaît trois valeurs, on peut déterminer la valeur manquante sans déterminer le coefficient de proportionnalité

Grandeur 1	a	c
Grandeur 2	b	$x??$

$$x = \frac{b \times c}{a}$$

Exemple :

5	12
27	x

$5 \times x = 12 \times 27$

$x = \dfrac{12 \times 27}{5}$

$x = 64,8$

Quatrième proportionnelle et résolution de problèmes

Exercice résolu
12 photocopies en couleur coûtent 5,40 € ? Le prix est proportionnel au nombre de photocopies.
Quel est le prix à payer pour 30 photocopies ?

On peut résoudre un problème de proportionnalité de différentes manières.
Pour cet exercice, on va utiliser un tableau de proportionnalité comportant 3 colonnes et 2 lignes.

Nombre de photocopies	12	30
Prix à payer (en €)	5,40	x

Dans la première colonne : les grandeurs

Dans la deuxième colonne : ce que je sais

Dans la troisième colonne la question

$12 \times x = 30 \times 5,40$

$x = \dfrac{30 \times 5,40}{12}$

$x = 13,50$

On termine l'exercice par répondre à la question à l'aide d'une phrase :
Le prix de 30 photocopies est 13,50 €

Caractériser graphiquement une situation de proportionnalité

Propriétés

Toute situation de proportionnalité se représente graphiquement par des points alignés avec l'origine du repère

Tout graphique dont les points sont alignés avec l'origine du repère représente une situation de proportionnalité

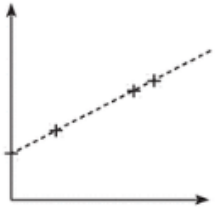
Exercice résolu :
Reconnaître un graphique représentant une situation de proportionnalité

Énoncé

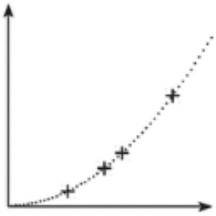
Le(s)quel(s) de ces trois graphiques représente(nt) une situation de proportionnalité ?

a.

b.



c.



Correction

a. Les points sont **alignés** avec l'origine du repère donc c'est une situation de proportionnalité.

b. Les points sont **alignés mais pas avec l'origine du repère** donc ce n'est pas une situation de proportionnalité.

c. Les points **ne sont pas alignés** donc ce n'est pas une situation de proportionnalité.

Vitesse

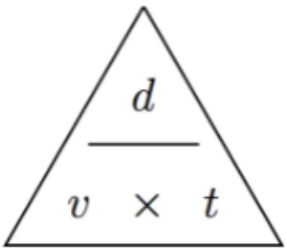
Pour étudier le mouvement d'un corps, on peut déterminer **sa vitesse** et la façon dont cette vitesse évolue dans le temps.

On peut donc calculer deux types de vitesses : la **vitesse moyenne** du corps mobile sur toute sa trajectoire et sa **vitesse instantanée** à un moment donné de sa trajectoire.

Exemple :
Lorsqu'une voiture parcourt une distance de 300 km en 3 h, sa **vitesse moyenne** sur ce trajet est de 100 km/h. Pourtant, cela ne signifie pas que le véhicule a maintenu sa vitesse à 100 km/h sur toute la durée du parcours. En effet, la vitesse indiquée à chaque instant sur le compteur du véhicule a varié, passant par exemple de 30 km/h à 130 km/h après un ralentissement. La vitesse indiquée par le compteur est donc la **vitesse instantanée** du véhicule.

Formules

Pour retenir les trois formules, on peut utiliser le triangle ci-dessous



Il faut cacher la grandeur cherchée pour faire apparaître la formule concernée.

Cela nous donne

$$v = \frac{d}{t} \qquad d = v \times t \qquad t = \frac{d}{v}$$

Exercices résolus

a. Clara a roulé 1 h 30 min sur autoroute à la vitesse moyenne de 108 km/h.
Calculer la distance qu'elle a parcourue.

b. Brian a parcouru 54 km à vélo à la vitesse moyenne de 24 km/h.
Calculer la durée de son trajet.

c. Aline a marché 14 km.
Elle a effectué ce parcours en 1 h 45 min.
Calculer sa vitesse moyenne.

Correction

Exercice a)

Dans cet exercice, on cherche la distance.

$d = v \times t$

$d = 108 \times 1\ h\ 30\ min$

$d = 162\ km$

Exercice b)

Dans cet exercice, on cherche la durée du trajet donc le temps.

$t = \dfrac{d}{v}$

$t = \dfrac{54}{24}$

$t = 2,25\ heures$

Pour convertir en heures minutes :

$t = 2h15min$

Exercice c)

Dans cet exercice, on cherche la vitesse moyenne.

$v = \dfrac{d}{t}$

$v = \dfrac{14}{1\ h\ 45\ min}$

$v = 8\ km/h$

Racine carrée

Définition

a désigne un nombre positif
La racine carrée de a est le nombre positif dont le carré est a.
Ce nombre est noté $\sqrt{a}$ (racine carrée de a)

$\sqrt{81} = 9$ car $9^2 = 81$

$(\sqrt{81})^2 = 81$

Le signe $\sqrt{}$ est appelé radical

<u>Exemples :</u>

$0^2 = 0$ donc $\sqrt{0} = 0$
$1^2 = 1$ donc $\sqrt{1} = 1$
$2^2 = 4$ donc $\sqrt{4} = 2$
$3^2 = 9$ donc $\sqrt{9} = 3$
$4^2 = 16$ donc $\sqrt{16} = 4$
$5^2 = 25$ donc $\sqrt{25} = 5$
$6^2 = 36$ donc $\sqrt{36} = 6$
$7^2 = 49$ donc $\sqrt{49} = 7$
$8^2 = 64$ donc $\sqrt{64} = 8$
$9^2 = 81$ donc $\sqrt{81} = 9$
$10^2 = 100$ donc $\sqrt{100} = 10$
$11^2 = 121$ donc $\sqrt{121} = 11$
$12^2 = 144$ donc $\sqrt{144} = 12$
$13^2 = 169$ donc $\sqrt{169} = 13$
$14^2 = 196$ donc $\sqrt{196} = 14$
$15^2 = 225$ donc $\sqrt{225} = 15$

Pour tout nombre positif a, $\sqrt{a^2} = a$

Exemple :

$\sqrt{5^2} = 5$ $\sqrt{7^2} = 7$ $\sqrt{23^2} = 23$

Calculatrice

Pour écrire $\sqrt{9}$ sur la calculatrice, il faut taper

Puissances

I) Puissance d'exposant positif

Définition

a est un nombre et n est un entier naturel supérieur à 1

$$\underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{\textbf{n facteurs}} = a^n$$

a^n est le produit de n facteurs tous égaux à a.

a^n se lit « a puissance n »

Remarque :

$a^1 = a \qquad a^0 = 1$

Exemples :

$7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 = 7^5$

$(-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = (-3)^4$

Calculer :

$5^2 = 5 \times 5 = 25$

$2^6 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 64$

$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{27}$

$14^1 = 14$

$23^0 = 1$

II) Priorités opératoires

Règle de priorité

Dans une expression sans parenthèses, on effectue en priorité les puissances, puis les multiplications et divisions et en dernier les additions et soustractions

Exemples :

$A = 15 + 3^4 \times 2 \qquad B = 32 - 2^4 : 4$

$A = 15 + 81 \times 2 \qquad B = 32 - 16 : 4$

$A = 15 + 162 \qquad B = 32 - 4$

$A = 177 \qquad B = 28$

III) Puissance d'exposant négatif

Définition

a est un nombre non nul et n est un entier

a^{-n} **est l'inverse de** a^n **:** $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

Exemples :

$3^{-2} = \dfrac{1}{3^2} = \dfrac{1}{9}$ $\qquad$ $5^{-3} = \dfrac{1}{5^3} = \dfrac{1}{125}$ $\qquad$ $4^{-1} = \dfrac{1}{4}$

IV) Puissances de 10

Les puissances de 10 sont des cas particuliers des puissances.

L'écriture décimale s'obtient alors très facilement

$10^n = 1\underbrace{00\cdots0}_{\textbf{n zéros}}$	$10^{-n} = \underbrace{0,00\cdots0}_{\textbf{n zéros}}1$

Exemples :

$10^4 = 10\ 000$ (4 zéros) $\qquad$ $10^{-4} = 0,0001$

$10^9 = 1\ 000\ 000\ 000$ (9 zéros) $\qquad$ $10^{-9} = 0,000000001$

V) Produit d'un nombre par une puissance de 10

Soit n un nombre entier positif

Pour multiplier un nombre par 10^n **il suffit de déplacer la virgule de n rangs vers la droite**

Pour multiplier un nombre par 10^{-n} **il suffit de déplacer la virgule de n rangs vers la gauche**

Exemples :

$3,64 \times 10^5 = 364\ 000$ $\qquad$ 5 rangs vers la droite

$9 \times 10^3 = 9\ 000$ $\qquad$ 3 rangs vers la droite

$25,75 \times 10^{-5} = 0,0002575$ $\qquad$ 5 rangs vers la gauche

$8 \times 10^{-3} = 0,008$ $\qquad$ 3 rangs vers la gauche

VI) Notation scientifique

Un nombre a plusieurs écritures (écriture décimale ou écriture fractionnaire par exemple).

La notation scientifique permet de lire plus simplement les très grands nombres et les très petits nombres.

Un nombre décimal est écrit avec la notation scientifique lorsqu'il est présenté sous la forme du produit d'un nombre décimal compris entre 1 et 10 par une puissance de 10

Exemples :

Donner l'écriture scientifique des nombres suivants :

45 000

Première étape : je place une virgule de façon a obtenir un nombre compris entre 1 et 10 puis je supprime les zéros inutiles.

$45\ 000 \rightarrow 4,5000 \rightarrow 4,5$

Pour passer de 4,5 à 45 000 il faut déplacer la virgule de **4** rangs vers la **droite (+)**.

On a donc $45\ 000 = 4,5 \times 10^{4}$

70 000 000

Première étape : je place une virgule de façon a obtenir un nombre compris entre 1 et 10 puis je supprime les zéros inutiles.

$70\ 000\ 000 \rightarrow 7,0000000 \rightarrow 7$

Pour passer de 7 à 70 000 000 il faut déplacer la virgule de **7** rangs vers la **droite (+)**.

On a donc $70\ 000\ 000 = 7 \times 10^{7}$

0,00006

Première étape : je place une virgule de façon a obtenir un nombre compris entre 1 et 10 puis je supprime les zéros inutiles.

$0,00006 \rightarrow 000006 \rightarrow 6$

Pour passer de 6 à 0,00006 il faut déplacer la virgule de **5** rangs vers la **gauche (-)**.

On a donc $0,00006 = 6 \times 10^{-5}$

0,0478

Première étape : je place une virgule de façon a obtenir un nombre compris entre 1 et 10 puis je supprime les zéros inutiles.

$0,0478 \rightarrow 004,78 \rightarrow 4,78$

Pour passer de 4,78 à 0,0478 il faut déplacer la virgule de **2** rangs vers la **gauche (-)**.

On a donc $0,0478 = 4,78 \times 10^{-2}$

VII) Les préfixes

Préfixe	Tera	Giga	Mega	Kilo	Hecto	Deca	Unité	Déci	Centi	Milli	Micro	Nano	Pico	Femto
Symbole	T	G	M	K	h	da		d	c	m	µ	n	p	f
10^n	10^{12}	10^9	10^6	10^3	10^2	10^1	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}	10^{-15}

$3\ Go\ (\ 3\ gigaoctets\ )\ =\ 3 \times 10^9\ octets\ =\ 3\ 000\ 000\ 000\ octets$
$12\ Mo\ (12\ mégaoctets\ )\ =\ 12 \times 10^6\ octets\ = 12\ 000\ 000\ octets$
$25\ pm\ (\ 25\ picomètres\ )\ =\ 25 \times 10^{-12}\ m\ = 0,000000000025\ m$

VIII) Utiliser la calculatrice

Pour écrire 5^4 sur la calculatrice

Pour déterminer l'écriture scientifique de 7500

IX) Opérations sur les puissances

Pour calculer des expressions comprenant des puissances, on revient à la définition.

Néanmoins, on peut mémoriser les propriétés ci-dessous :

a, b désignent des nombres relatifs et m, n des nombres entiers relatifs.

$a^m \times a^n = a^{m+n}$	$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$a^m \times b^m = (a \times b)^m$	$(a^m)^n = a^{m \times n}$
$3^7 \times 3^4 = 3^{11}$	$\dfrac{2^3}{2^{10}} = 2^{-7}$	$3^9 \times 4^9 = 12^9$	$\left(2^5\right)^3 = 2^{15}$

Expressions littérales

Une expression littérale est un calcul contenant une ou plusieurs lettres qui désignent des nombres.

Une expression littérale peut servir à décrire une méthode de calcul.
On utilise une expressions littérales pour calculer des aires, des volumes...

Convention d'écriture

Il est possible de ne pas écrire le signe $\times$ devant une lettre ou une parenthèse.
$4 \times x$ s'écrit $4x$
$9 \times (3x + 7)$ s'écrit $9(3x + 7)$
$x \times x$ s'écrit x^2
$x \times x \times x$ s'écrit x^3
La formule $\pi \times r \times r$ peut s'écrire πr^2

Valeur numérique d'une expression littérale

Calculer la valeur d'une expression littérale, c'est attribuer un nombre à chaque lettre afin d'effectuer le calcul

Déterminer la valeur numérique de A pour $x = -2$

$A = 5x^2 - 8x + 7$
$A = 5 \times (-2)^2 - 8 \times (-2) + 7$
$A = 5 \times 4 + 16 + 7$
$A = 20 + 16 + 7$
$A = 43$

Supprimer les parenthèses

Lorsque les parenthèses sont précédées du signe $+$, on «conserve les signes»
Lorsque les parenthèses sont précédées du signe $-$, on «change les signes»

<u>Exemple :</u>

$B = 15 + (7x^2 - 9x + 3) - (10x^2 + 4x - 20)$
$B = 15 + 7x^2 - 9x + 3 - 10x^2 - 4x + 20$
$B = 7x^2 - 10x^2 - 9x - 4x + 15 + 3 + 20$
$B = -3x^2 - 13x + 38$

Développer une expression consiste à transformer un produit en une somme ou une différence.

La simple distributivité

On utilise les formules suivantes :

$k(a+b) = k \times a + k \times b$ $\qquad$ $k(a-b) = k \times a - k \times b$

<u>Exemples :</u> Développer les expressions suivantes

$A = 2(3x+9)$

$A = 2 \times 3x + 2 \times 9$

$A = 6x + 18$

$B = 5x(2x-4)$

$B = 5x \times 2x - 5x \times 4$

$B = 10x^2 - 20x$

La double distributivité

On utilise la formule suivante :

$(a+b)(c+d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$

<u>Exemples :</u> Développer les expressions suivantes

$A = (3x+7)(2x-5)$

On met en rouge les nombres négatifs

Si les 2 nombres reliés sont de la **même** couleur : $+$

Si les 2 nombres reliés sont de couleurs **différentes** : $-$

$A = 3x \times 2x - 3x \times 5 + 7 \times 2x - 7 \times 5$

Cette ligne est facultative

$A = 6x^2 - 15x + 14x - 35$

$A = 6x^2 - x - 35$

$B = (4x-7)(6x-8)$

$B = 4x \times 6x - 4x \times 8 - 7 \times 6x + 7 \times 8$

$B = 24x^2 - 32x - 42x + 56$

Égalités remarquables

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Développer à l'aide d'une égalité remarquable

Exemples :

$A = (4y+5)^2$ il s'agit de la première égalité remarquable
$A = (4y)^2 + 2 \times 4y \times 5 + 5^2$
$A = 16y^2 + 40y + 25$

$B = (3k-7)^2$ il s'agit de la deuxième égalité remarquable
$B = (3k)^2 - 2 \times 3k \times 7 + 7^2$
$B = 9k^2 - 42k + 49$

$C = (6x+8)(6x-8)$ il s'agit de la troisième égalité remarquable
$C = (6x)^2 - (8)^2$
$C = 36x^2 - 64$

Factoriser avec un facteur commun

Factorise l'expression $I = (2x+5)(3x+7) + (2x+5)(6x+1)$

$I =$ (2x+5) $(3x+7) +$ (2x+5) $(6x+1)$
$I = (2x+5)(3x+7+6x+1)$
$I = (2x+5)(9x+8)$

Factorise l'expression $J = (9x-4)(5x+6) - (9x-4)(3x+11)$
$J =$ (9x-4) $(5x+6) -$ (9x-4) $(3x+11)$
$J = (9x-4)[(5x+6) - (3x+11)]$
$J = (9x-4)(5x+6-3x-11)$
$J = (9x-4)(2x-5)$

Factoriser à l'aide de l'égalité $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

$A = x^2 - 25$
$A = (x)^2 - (5)^2$
$A = (x+5)(x-5)$

$B = 16x^2 - 144$
$B = (4x)^2 - (12)^2$
$B = (4x+12)(4x-12)$

$C = 36x^2 - 5$
$C = (6x)^2 - (\sqrt{5})^2$
$C = (6x+\sqrt{5})(6x-\sqrt{5})$

$D = (2x+10)^2 - 49$
$D = (2x+10)^2 - (7)^2$
$D = (2x+10+7)(2x+10-7)$
$D = (2x+17)(2x+3)$

Équations

Une équation est une égalité dans laquelle il y a un nombre inconnu.

En fait, vous avez déjà résolu une équation en primaire.

$\ldots + 5 = 8$ est une équation !

La solution de cette équation est 3 car $3 + 5 = 8$

En classe de quatrième, nous avons écris cette équation :

$x + 5 = 8$. La solution de cette équation est $x = 3$

Règle 1 :

Dans une équation, on ne change pas les solutions en ajoutant ou en soustrayant un même nombre à chaque membre.

Résolvons en détaillant deux équations :

$x + 64 = 97$

$x + 64 - 64 = 97 - 64$ On enlève 64 aux deux membres de l'équation.

$x = 33$

$x - 26 = 54$

$x - 26 + 26 = 54 + 26$ On ajoute 26 aux deux membres de l'équation.

$x = 80$

Règle 2 :

Dans une équation, on ne change pas les solutions en multipliant ou en divisant par un même nombre non nul chaque membre.

Résolvons deux équations : $5x = 57$ et $\frac{x}{5} = 33$

$5x = 57$	$\frac{x}{5} = 33$
$\frac{5x}{5} = \frac{57}{5}$	$x = 5 \times 33$
$x = 11,4$	$x = 165$

Appliquons les deux règles pour résoudre les équations suivantes :

$5x - 23 = 423$

$5x = 423 + 23$ On ajoute 23 aux deux membres de l'égalité

$5x = 446$

$\frac{5x}{5} = \frac{446}{5}$ On divise par 5 les deux membres de l'égalité

$x = 89,2$ Et voilà !!

Un autre exemple...

$2x + 460 = 910$

$2x = 910 - 460$ On enlève 460 aux deux membres de l'égalité

$2x = 450$

$\frac{2x}{2} = \frac{450}{2}$ On divise par 2 les deux membres de l'égalité

$x = 225$ Et voilà !!

Mise en équation d'un problème

Les cinq étapes de la mise en équation :

1) Choix de l'inconnue : En général, il s'agit du nombre qu'il faut trouver dans le problème.

2) Mise en équation : Il s'agit en pratique de traduire les phrases en français par une relation mathématique équivalente.

3) Résolution de l'équation : On résout l'équation.

4) Conclusion :On répond à la question posée dans l'énoncé par une phrase en français .

5) Vérification : Les valeurs trouvées dans la troisième étape, doivent être des solutions du problème de départ.

Exemple :

Si on ajoute l'âge de Pierre, de son père et de son grand-père, on obtient 121 ans.

Le père est 3 fois plus âgé que Pierre et le grand-père a 23 ans de plus que le père.

Déterminer l'âge de chacun.

1) Choix de l'inconnue

On pose x l'âge de Pierre. Le père a donc $3x$ ans et le grand-père a $3x + 23$ ans

2) Mise en équation

$x + 3x + 3x + 23 = 121$

3) Résolution de l'équation

$7x + 23 = 121$

$7x = 121 - 23$

$7x = 98$

$\frac{7x}{7} = \frac{98}{7}$

$x = 14$

4) Conclusion

Pierre a 14 ans

Son père a 42 ans ($3 \times 14 = 42$)

Son grand-père a 65 ans ($42 + 23 = 65$)

5) Vérification

$14 + 42 + 65 = 121$

Équation-produit

Si un produit est nul, alors l'un des facteurs est égal à zéro

Exemple 1 :

Résoudre $(2x+16)(3x-20)=0$

Si un produit est nul, alors l'un des facteurs est égal à zéro.

Soit $2x+16=0$

$2x=0-16$

$2x=-16$

$\frac{2x}{2}=\frac{-16}{2}$

$x=-8$

Soit $3x-20=0$

$3x=0+20$

$3x=20$

$\frac{3x}{3}=\frac{20}{3}$

$x=\frac{20}{3}$

Les solutions sont -8 et $\frac{20}{3}$

Exemple 2 :

Résoudre $3x(5x-7)+(5x-7)(7x+20)=0$

Dans un premier temps, il faut factoriser le membre de gauche de cette équation.

$3x(5x-7)+(5x-7)(7x+20)=0$

$(5x-7)(3x+7x+20)=0$

$(5x-7)(10x+20)=0$

Si un produit est nul, alors l'un des facteurs est égal à zéro.

Soit $5x-7=0$

$5x=0+7$

$5x=7$

$\frac{5x}{5}=\frac{7}{5}$

$x=1,4$

Soit $10x+20=0$

$10x=0-20$

$10x=-20$

$\frac{10x}{10}=\frac{-20}{10}$

$x=-2$

Les solutions sont $1,4$ et -2

Exemple 3 :

Résoudre $(5x+8)^2-25=0$

Il faut factoriser le membre de gauche en utilisant l'égalité remarquable $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

$(5x+8)^2-5^2=0$

$(5x+8+5)(5x+8-5)=0$

$(5x+13)(5x+3)=0$

Si un produit est nul, alors l'un des facteurs est égal à zéro.

Soit $5x + 13 = 0$

$5x = 0 - 13$

$5x = -13$

$\frac{5x}{5} = \frac{-13}{5}$

$x = -2,6$

Soit $5x + 3 = 0$

$5x = 0 - 3$

$5x = -3$

$\frac{5x}{5} = \frac{-3}{5}$

$x = -0,6$

Les solutions sont $-2,6$ et $-0,6$

Fonctions

Notion de fonction

A un nombre x, une fonction f associe un nombre et un seul que l'on note $f(x)$
$f(x)$ se lit f de x.
On dit que $f(x)$ est l'image de x par la fonction f.
<u>Exemple :</u>
Soit $f : x \longmapsto 4x + 7$ $\qquad 4 \times 3 + 7 = 19$
$3 \longmapsto 19$
$f(3) = 19$
19 es l'image de 3 par f
3 est un antécédent de 19 par f

$f : x \longmapsto 4x + 7$ $\qquad 4 \times 10 + 7 = 47$
$10 \longmapsto 47$
$f(10) = 47$
47 es l'image de 10 par f
10 est un antécédent de 47 par f

$f : antécédent \longmapsto image$ $\qquad f(antécédent) = image$

Définir une fonction

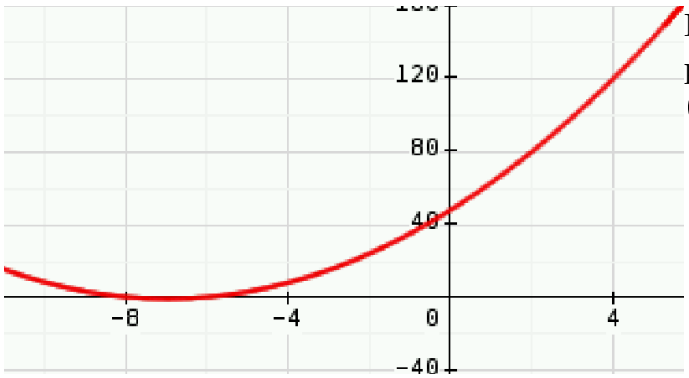
Une fonction peut être définie par :

une expression littérale $\qquad f : x \longmapsto (x+7)^2$

un tableau de valeurs

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	25	36	49	64	8

un graphique



Représenter graphiquement une fonction, c'est place dans le repère tout les points de coordonnées $(x\,;f(x))$

Exercices résolus

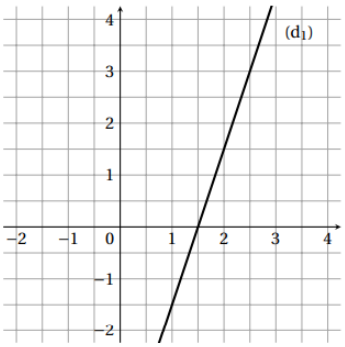
Exercice n°1 :

On considère la fonction f définie par $f(x) = -3x + 1,5$

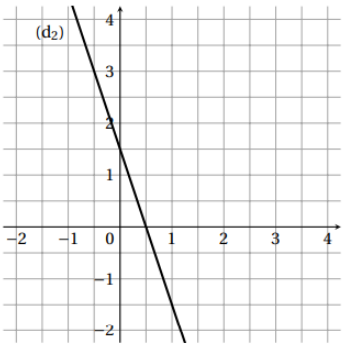
1) Déterminer l'image de 7 par f

2) Déterminer à l'aide d'une équation l'antécédent de 100 par la fonction f

3) Parmi les 2 graphiques ci-dessous, quel est celui qui représente la fonction f ? Justifier.



Graphique A



Graphique B

Correction :

1) On cherche l'image de 7 par f donc on va calculer $f(7)$.

$f(7) = -3 \times 7 + 1,5$

$f(7) = -21 + 1,5$

$f(7) = -19,5$

2) On cherche l'antécédent de 100 par f, c'est à dire que l'on cherche la valeur de x pour laquelle $f(x) = 100$.

$-3x + 1,5 = 100$

$-3x = 100 - 1,5$

$-3x = 98,5$

$x = \dfrac{98,5}{-3}$

$x = \dfrac{-197}{6}$ (ce nombre n'admet pas d'écriture décimale)

3) Pour déterminer le bon graphique, on peut par exemple calculer $f(0)$.

$f(0) = -3 \times 0 + 1,5$

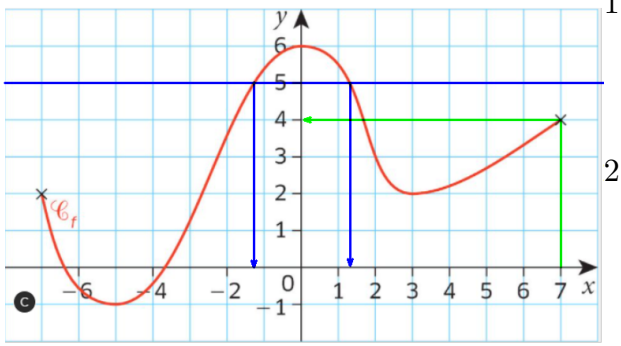
$f(0) = 1,5$

Le point de coordonnées $(0\ ; 1,5)$ appartient à la droite.

Le bon graphique est donc le graphique B.

Exercice n°2 :

On considère C_f la courbe représentative de la fonction f



1) Déterminer l'image de 7

L'image de 7 par la fonction f est 4

2) Déterminer le nombre d'antécédents de 5

5 a 2 antécédents par f

Fonctions linéaires

Définition

Si «a» est un nombre fixé, on appelle fonction linéaire de coefficient «a», la fonction qui, à un nombre noté x, associe le nombre $a \times x$
On note $f : x \longmapsto ax$ ou $f(x) = ax$ pour tout nombre x .

Exemple :
Soit f est la fonction linéaire de coefficient 2.
$f : x \longmapsto 2x$ Alors :
L'image de 5 est : $f(5) = 2 \times 5 = 10$
L'image de (-3) est : $f(-3) = 2 \times -3 = -6$
L'image de 0 est : $f(0) = 2 \times 0 = 0$

A toute situation de proportionnalité, on peut associer une fonction linéaire.
On dit que cette fonction linéaire modélise la situation de proportionnalité.

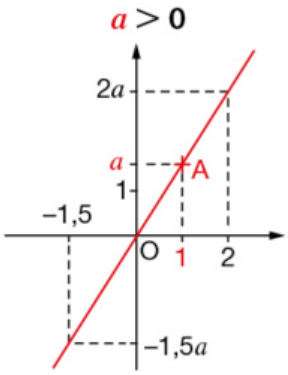
$\times 2$

x	5	-3	0
$f(x)$	10	-6	0

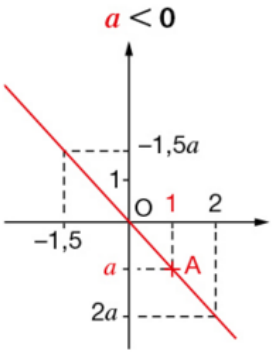
Représentation graphique

Soit f la fonction linéaire définie par: $f : x \longmapsto ax$
La représentation graphique de la fonction linéaire f est constitué de tous les points de coordonnées $(x\ ; ax)$.
Cette représentation est LA droite passant par:
- L'origine du repère.
- Le point de coordonnées $(1; a)$

«a» est le coefficient directeur de la droite. Il indique "l'inclinaison" de la droite.



La droite (OA) « monte »
(de gauche à droite).



La droite (OA) « descend »
(de gauche à droite).

Déterminer un fonction linéaire

Soit f une fonction linéaire.
Pour déterminer cette fonction, il suffit de connaître « a »

$$a = \frac{f(x)}{x}$$

Exemple :
Soit f une fonction linéaire telle que $f(5) = 17$
$a = \frac{f(5)}{5} = \frac{17}{5} = 3,4$
Donc f est la fonction $x \longmapsto 3,4x$.

Pourcentages

Augmenter un nombre de t % revient à multiplier ce nombre par $k = (1 + \frac{t}{100})$

Diminuer un nombre de t % revient à multiplier ce nombre par $k = (1 - \frac{t}{100})$

Exemple 1 :
Une télévision est vendu 450€. Son prix augmente de 12 %.
Déterminer son nouveau prix
$450 \times (1 + \frac{12}{100}) = 504$
Le nouveau prix de la télévision est 504 €

Exemple 2 :
Un PC est vendu 540€. Son prix diminue de 20 %.
Déterminer son nouveau prix
$540 \times (1 - \frac{20}{100}) = 432$
Le nouveau prix du PC est 432 €

Exemple 3 :
Après une augmentation de 5 %, un téléphone est vendu 336 €.
Quel était son prix de départ ?
Augmenter de 5 % revient à multiplier par $(1 + \frac{5}{100})$. Mais dans cet exercice, on cherche le prix de départ. Donc on ne va pas multiplier mais diviser !
$336 \div (1 + \frac{5}{100}) = 320$
Le prix de départ du téléphone était 320 €

Exemple 4 :
Un jeu vidéo était proposé au prix de 60 €.
Il est maintenant vendu 45 €.
Déterminer le pourcentage qui représente cette baisse.

$60 \times k = 45$

$k = \dfrac{45}{60}$

$k = 0,75$

Pour trouver le pourcentage, il suffit de calculer $k \times 100 - 100$
$0,75 \times 100–100 = -25$

Le prix a donc diminué de 25%

Fonctions affines

Définition

Une fonction f est dite affine si elle est définie par une formule du type : $f : x \longmapsto ax + b$
où a est un nombre connu appelé coefficient directeur.
et b est un nombre connu appelé ordonnée à l'origine.

Exemple :

La fonction h définie par $h(x) = 2x + 1$ ou $h : x \longmapsto 2x + 1$ est une fonction affine.

Cas particuliers :

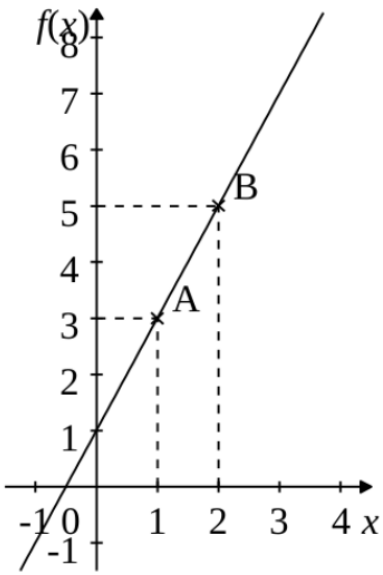
-Une fonction affine $f : x \longmapsto ax + b$ est linéaire si $b = 0$ car on a $f : x \longmapsto ax$
-Une fonction affine $f : x \longmapsto ax + b$ est constante si $a = 0$ car on a $f : x \longmapsto b$

Représentation graphique d'une fonction affine

La représentation graphique d'une fonction affine est une droite.
Pour tracer une fonction affine, il suffit seulement de placer deux points de la courbe.

Ici le point $A(1; 3)$ appartient à la courbe.
En effet, $h(1) = 2 \times 1 + 1 = 3$

et $B(2; 5)$ appartient également à la courbe.
$h(2) = 2 \times 2 + 1 = 5$



Exercices corrigés :

Exercice n°1 :

On considère les fonctions affines suivantes :

$f \ : x \longmapsto 2x - 5$

$g \ : x \longmapsto -3x + 8$

On appelle (D_f) la droite représentative de la fonction f

On appelle (D_g) la droite représentative de la fonction g

1) Le point $A(27; 50)$ appartient-il à (D_f) ?

2) Le point B(-10;38) appartient-il à (D_g) ?

3) Déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites (D_f) et (D_g).

Correction :

1) $f(x) = 2x - 5$

$f(27) = 2 \times 27 - 5$

$f(27) = 49 \neq 50$

Donc A(27;50) n'appartient pas à la droite (D_f)

2) $g(x) = -3x + 8$

$g(-10) = -3 \times (-10) + 8$

$g(-10) = 38$

Donc B(-10;38) appartient à la droite (D_g)

3) Déterminons les coordonnées du point d'intersection des droites (D_f) et (D_g).

$f(x) = g(x)$

$2x - 5 = -3x + 8$

$2x + 3x = 8 + 5$

$\frac{5x}{5} = \frac{13}{5}$

$x = 2,6$

L'abscisse du point d'intersection des droites (D_f) et (D_g) est 2,6.

Déterminons l'ordonnée. Pour cela, il suffit de déterminer l'image de 2,6 par f ou par g.

Dans cet exercice, nous allons faire les 2 calculs mais un seul suffit.

$f(2,6) = 2 \times 2,6 - 5 = 0,2$ $\qquad$ $g(2,6) = -3 \times 2,6 + 8 = 0,2$ (évidemment le même résultat)

Les coordonnées du point d'intersection de (D_f) et (D_g) : $(2,6\ ;0,2)$

Exercice n°2 :

On considère la fonction affine $f\ : x \longmapsto 7x - 12$

1) Déterminer l'image de 8 par f

2) Déterminer l'antécédent de 23 par f.

Correction :

1) $f(8) = 7 \times 8 - 12 = 56 - 12 = 44$

L'image de 8 par f est 44

2) On cherche la valeur de x tel que $f(x) = 23$.

$7x - 12 = 23$

$7x = 23 + 12$

$7x = 35$

$\frac{7x}{7} = \frac{35}{7}$

$x = 5$

L'antécédent de 23 par f est 5.

Statistiques

Effectifs et fréquences

En statistique, on étudie sur **une population un caractère** qui peut prendre plusieurs **valeurs**.

Exemple: on a interrogé les 25 élèves d'une classe de 5e au sujet de leur sport préféré.

Dans cette enquête, **la population** étudiée est une classe de 5e.
Le caractère étudié est le sport préféré des élèves.
Les valeurs possibles de ce caractère sont: football, basket, tennis, handball et danse.

Voici les résultats de cette enquête :

Valeurs	Football	Basket	Handball	Tennis	Danse	Total
Effectifs	8	6	2	3	6	25

L'effectif d'une valeur est le nombre de fois où cette valeur apparaît.
L'effectif total est le nombre total d'individus de la population étudiée.

La fréquence d'une valeur est le quotient de l'effectif de cette valeur par l'effectif total.
Cette fréquence peut s'écrire sous la forme d'une fraction, d'un nombre décimal ou d'un pourcentage.

Exemple :

La fréquence de la valeur « football » est $\frac{8}{25} = 0,32 = 32\%$

Moyenne

La moyenne d'une série statistique est le quotient de la somme de toutes les valeurs des données par l'effectif total.

Exercice résolu 1 : Moyenne simple
Sophie a calculé le temps qu'elle a passé la semaine dernière devant la télévision

Jour	Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi	Samedi	Dimanche
Temps en min	62	57	110	60	46	122	131

Calculons le temps moyen qu'elle a passé devant la télévision.
L'effectif total est égal à 7.

$$\frac{62 + 57 + 110 + 60 + 46 + 122 + 131}{7} = 84$$

Sophie a passé en moyenne 84 minutes devant la télévision

Exercice résolu 2 : Moyenne pondérée

Les élèves d'une classe de 4ème ont indiqué le nombre de livres qu'ils ont lus durant le mois d'avril. Voici les résultats de l'enquête.

Nombre de livres lus	0	1	2	3	7	8	15	Total
Effectifs	12	4	3	3	1	1	1	25

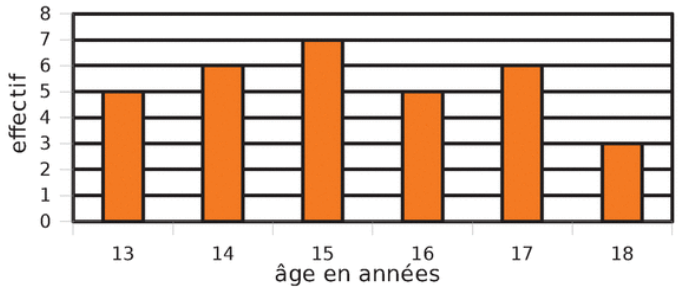
Calcule le nombre de livres lus en moyenne par les élèves.

L'effectif total est égal à 25. Pour déterminer la moyenne, on devra donc diviser le nombre total de livres lus par 25.

$$\frac{0 \times 12 + 1 \times 4 + 2 \times 3 + 3 \times 3 + 7 \times 1 + 8 \times 1 + 15 \times 1}{25} = 1,96$$

Les élèves ont lu en moyenne 1,96 livre au mois d'Avril.

Exercice résolu 3 : Moyenne pondérée



Voici la répartition par âge des membres d'un club d'échec.
Déterminer l'effectif total :

$5 + 6 + 7 + 5 + 6 + 3 = 32$

Calculons l'âge moyen :

$$\frac{13 \times 5 + 14 \times 6 + 15 \times 7 + 16 \times 5 + 17 \times 6 + 18 \times 3}{32} = 15,3125$$

L'âge moyen est égal à 15,3 ans.

Étendue

L'étendue d'une série statistique est la différence entre la plus grande et la plus petite des valeurs de la série

Exercice résolu 4 : étendue

Dans chaque cas, déterminer l'étendue des séries statistiques.

1) 76 / 4 / 16 / 99 / 35 / 71 / 8 / 26

La plus grande valeur est 99.
La plus petite valeur est 4
L'étendue est égale à $99 - 4 = 95$

2) Le syndicat de la chaussure a réalisé une étude auprès d'un échantillon de 1000 adultes pour connaître la répartition des pointures

Pointure	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46
Effectif	23	43	76	108	114	136	137	113	94	81	53	22

Dans cet exercice, on s'intéresse à la pointure des adultes.
La plus grande pointure est 46.
La plus petite pointure est 35.
L'étendue de la série statistique est $46 - 35 = 11$

Médiane

Les valeurs d'une série statistiques étant rangées par ordre croissant,
la médiane est un nombre m tel que:
Au moins la moitié des valeurs de la série sont inférieures ou égales à m
Au moins la moitié des valeurs de la série sont supérieures ou égales à m

Exercice résolu 5 : médiane (nombre impair de valeurs)

Voici le temps consacré, en minutes, au petit-déjeuner par 7 personnes :
16 / 12 / 8 / 19 / 5 / 8 / 18.
Déterminons la médiane de cette série statistique
La première chose à faire est de classer les données dans l'ordre croissant.
S'il y a plusieurs valeurs égales, il faut toutes les noter.
5 / 8 / 8 / 12 / 16 / 18 / 19.
On va maintenant ajouter 1 à l'effectif total puis diviser le résultat par 2.

$7 + 1 = 8 \qquad 8 \div 2 = 4$

La médiane de cette série statistique est la 4ème valeur : **12**
5 / 8 / 8 / **12** / 16 / 18 / 19.
Exercice résolu 6 : médiane (nombre pair de valeurs)
Ce cas est un peu plus compliqué que le précédent.

Voici les notes obtenues par 10 élèves :
12 / 17 / 9 / 12 / 12 / 13 / 19 / 17 / 20 / 16
Déterminons la médiane de cette série statistique
La première chose à faire est de classer les données dans l'ordre croissant.
S'il y a plusieurs valeurs égales, il faut toutes les noter.

9/12/12/12/13/16/17/17/19/20

On va maintenant ajouter 1 à l'effectif total puis diviser le résultat par 2.
$10 + 1 = 11 \qquad 11 \div 2 = 5,5$
5,5 n'est pas un nombre entier. Il est compris entre 5 et 6
La médiane sera donc comprise entre la 5ème valeur et la 6ème valeur de cette série statistiques.

La 5ème valeur est 13
La 6ème valeur est 16
Déterminons la valeur qui est comprise entre 13 et 16 :

$$\frac{13+16}{2} = 14,5$$

La médiane de cette série statistique est **14,5**

$$\overbrace{9/12/12/12/13}^{5\text{ valeurs}}\ \overbrace{16/17/17/19/20}^{5\text{ valeurs}}$$

la médiane: 14,5

Comme vous venez de le voir, la médiane n'est pas forcément une valeur de la série statistique.
Dans l'exercice 5, la médiane est une valeur de la série statistique.
Dans l'exercice 6, la médiane n'est pas une valeur de la série statistique.

Exercice résolu 7 : médiane (données présentées dans un tableau)
Une enquête a été réalisée dans des restaurants pour connaître l'effectif de leurs personnels salariés.

Nombre de salariés	2	3	4	5	6	7	8
Effectif	5	7	14	17	21	10	6

Déterminer la médiane de cette série statistiques.

Dans un premier temps, il faut trouver l'effectif total :
$5+7+14+17+21+10+6=80$
La statistique porte donc sur 80 restaurants.

On va maintenant ajouter 1 à l'effectif total puis diviser le résultat par 2.
$80+1=81$ $\qquad$ $81 \div 2 = 40,5$
40,5 est compris entre 40 et 41 donc la médiane est comprise entre la 40ème valeur et la 41ème valeur.

D'après le tableau :
Les 5 premières valeurs sont égales à 2.

Les 7 valeurs suivantes sont égales à 3.
5+7 = 12. La 12ème valeur est égale à 3. La 13ème valeur est égale à 4.

Les 14 valeurs suivantes sont égales à 4.
5+7+14=26. La 26ème valeur est égale à 4. La 27ème valeur est égale à 5.

Les 17 valeurs suivantes sont égales à 5.
5+7+14+17=43. La 43ème valeur est égale à 5.

Toutes les valeurs comprises entre la 27ème valeur et la 43ème valeur sont égales à 5.

La 40ème valeur est donc égale à 5
La 41ème valeur est donc égale à 5

La médiane est comprise entre 5 et 5, c'est à dire que la médiane est égale à 5.

Pour ceux qui n'auraient pas compris, voici toutes les valeurs de la série statistique :

22222 3333333 44444444444444 55555555555555555 666666666666666666666
7777777777 888888.

Probabilités

Vocabulaire

1) Une expérience est dite aléatoire lorsqu'elle a plusieurs résultats ou issues possibles et que l'on ne peut pas prévoir avec certitude quel résultat se produira.

Exemple :
on lance une pièce de monnaie et on regarde sur quelle face elle va tomber.
– Il y a deux issues : Pile ou Face
– On ne sait pas sur quelle face elle va tomber.

2) Un événement est constitué par des issues d'une expérience aléatoire.
Exemple : On lance un dé à 6 faces et on regarde la face du dessus.
L'événement « obtenir un nombre impair » est constitué des issues « obtenir 1 », « obtenir 3 », « obtenir 5 ».
Remarques :
- l'événement « obtenir un nombre pair » est l'événement contraire.
- l'événement « obtenir un entier compris entre 1 et 6 » est un événement certain.
- l'événement « obtenir 7 » est un événement impossible.
- les événements « obtenir 1 » et « obtenir 6 » sont des événements incompatibles car ils ne peuvent se réaliser en même temps.

Probabilité et fréquence

Lorsqu'on répète un grand nombre de fois une expérience aléatoire, la fréquence de réalisation d'un événement tend à se stabiliser autour d'un nombre particulier appelée probabilité.

Exemple :

Au jeu du pile ou face, on s'intéresse à l'événement F : « sortie de Face » Si on réalise 1000 lancers, on n'obtiendra pas forcément 500 fois Face mais la fréquence d'apparition de Face sera proche de 0,5.
La probabilité de l'événement F est égale à 0,5 .
On note $p(F) = 0,5 = \frac{1}{2}$

Déterminer une probabilité

Pour certaines expériences aléatoires, on peut déterminer par un quotient la «chance» qu'un événement a de se produire. Ce quotient est appelé probabilité de l'événement.

Exemple :

Dans une boite, il y a 10 jetons: 4 bleus , 5 verts et 1 jaune.
On tire au hasard un jeton et on note sa couleur.

a) On note B, l'événement « le jeton tiré est bleu ».
On a 4 chances sur 10 de tirer un bleu.
Alors on note $p(B) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} = 0,4$

b) On a de la même façon $p(V) = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2} = 0,5$ et $p(J) = \dfrac{1}{10} = 0,1$
c) Considérons l'événement «le jeton tiré est vert ou jaune»

$p(V\ ou\ J) = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5} = 0,6$
On peut aussi écrire : $p(V\ ou\ J) = p(V) + p(J) = 0,5 + 0,1 = 0,6$

d) L'événement « le jeton tiré n'est pas bleu » est l'événement contraire de B.
On le note nonB ou $\bar{B}$
$p(\bar{B}) = \dfrac{6}{10} = 0,6$
Pour déterminer la probabilité $p(\bar{B})$ on peut aussi calculer $1 - p(B)$.

$p(\bar{B}) = 1 - 0,4 = 0,6$

Remarques :
1) la probabilité d'un événement est toujours comprise entre 0 et 1
2) la somme des probabilités de toutes les issues d'une expérience aléatoire est égale à 1
3) $p(\bar{B}) = 1 - p(B)$
4) la probabilité d'un événement impossible est égale à 0
5) la probabilité d'un événement certain est égale à 1
6) Lorsque deux événements sont incompatibles, la probabilité que l'un ou l'autre se réalise est égale à la somme de leurs probabilités.

Distances et périmètres

Autrefois...
Dans l'Antiquité, chaque peuple avait son propre système d'unités de mesure : coudées, doigts, paumes, pieds, stades pour les Grecs ou les Égyptiens, mais aussi pas, milles pour les Romains...
Au Moyen Age, les unités de mesure couramment utilisées en Occident sont le pied et le pouce (qui vaut un douzième de pied).
Sous l'ancien régime, en France : pied-du-roi, lieue, arpent, perche, toise, canne, aune... les unités utilisées étaient nombreuses, et de plus elles ne mesuraient pas forcément la même longueur selon la région où se l'on trouvait !
Aussi, à la fin du XVIIIème siècle, après la Révolution Française de 1789 (et en particulier sous l'impulsion de l'Académie des Sciences), on décide de créer une unité de mesure universelle : le mètre, défini alors comme la dix-millionième partie du quart de méridien terrestre. Des savants mettront plusieurs années à mesurer précisément ce quart de méridien, et ainsi donner naissance à cette nouvelle unité de mesure des longueurs, aujourd'hui à la base de ce que l'on appelle le système métrique (comportant des unités de masse (gramme), de capacité (litre), etc).

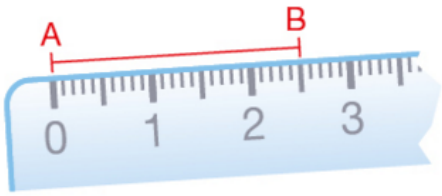
Ailleurs...
Principalement au Royaume-Uni et aux États-Unis, les unités de mesure de longueur usuelles ne sont pas celles du système métrique : les anglo-saxons utilisent les pouces (*inches* en anglais ; 1 pouce équivaut à 25,4 mm), les pieds (*feet* en anglais ; 1 pied est égal à 12 pouces, 1 pied équivaut donc à 30,48 cm), les yards (1 yard est égal à trois pieds, 1 yard équivaut donc à 0,9144 m) et les miles (1 mile est égal à 1609,344 m).
Par ailleurs, quelques pays conservent localement des unités qui leur sont propres, mais ont pour l'essentiel adhéré au système métrique.

Particularités...
En astronomie : les distances sont tellement gigantesques qu'il a fallu inventer de nouvelles unités de mesure de longueurs. Citons par exemple l'année-lumière : c'est la distance parcourue par la lumière dans le vide en une année, soit environ 9461 milliards de kilomètres tout de même... Imaginez que l'étoile la plus proche de notre Soleil est déjà située à plus de 4 années-lumière ! On peut également citer l'Unité Astronomique (UA), qui est égale à la distance moyenne entre la terre et le Soleil, soit environ 149,6 millions de kilomètres.
En matière de navigation on utilise également des unités différentes ; citons par exemple le mille marin, qui vaut environ 1852 m.

Distance entre deux points

La distance entre deux points est la longueur du plus court chemin entre ces deux points.
C'est la longueur du segment qui joint ces deux points

Exemple :
La distance entre les points A et B est 2,5 cm
On note AB=2,5 cm



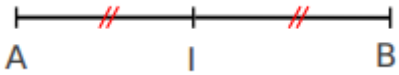
Unités de longueur et tableau de conversion

Multiples				Sous-multiples		
kilomètre	**hectomètre**	**décamètre**	**mètre**	**décimètre**	**centimètre**	**millimètre**
km	**hm**	**dam**	**m**	**dm**	**cm**	**mm**

Milieu d'un segment

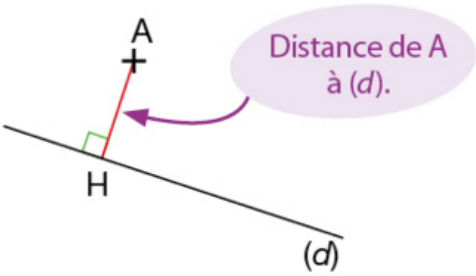
Le milieu d'un segment est le point de ce segment qui est situé à égale distance de ses extrémités. Pour traduire qu'un point I est le milieu d'un segment [AB], on écrit :
$I \in [AB]$ et $IA = IB$.

Distance d'un point à une droite



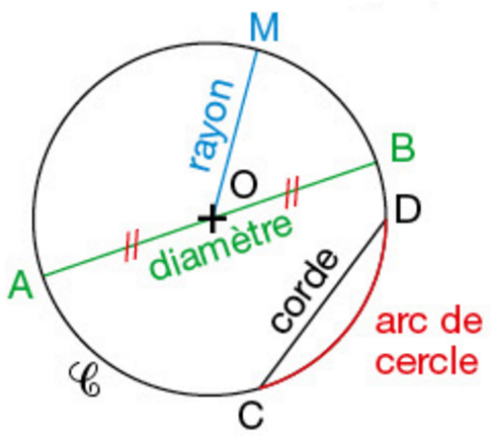
La distance d'un point à une droite est la longueur du plus court chemin entre ce point et la droite

La distance d'un point A à la droite (d) est la distance AH entre A et H, H étant le pied de la perpendiculaire menée de A à la droite (d)



Le cercle

Un cercle de centre O est formé de tous les points situés à une même distance du point O.
Cette distance est appelée le rayon du cercle.

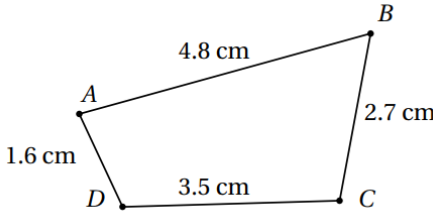


Les points A,B,C,D et M appartiennent au cercle de centre O.
Le segment [OM] est un rayon du cercle.
Le segment [CD] est une corde du cercle.
La corde [AB] est un diamètre du cercle.
O est le milieu du diamètre [AB]

Périmètre

Le périmètre d'une figure est la longueur de son contour, dans une unité de longueur donnée.

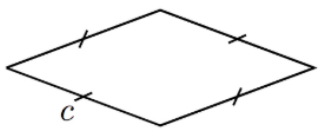
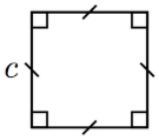
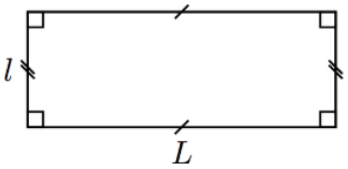
Par exemple, le périmètre du quadrilatère dessiné ci-contre est égal à :
$P = AB + BC + CD + DA$
$P = 4,8 + 2,7 + 3,5 + 1,6$
$P = 12,6\ cm$



Le périmètre d'une figure est une longueur dont il possède une unité (cm, m, km...)

Attention : Pour calculer un périmètre, il faut que toutes les longueurs soient exprimées dans la même unité

Périmètres de quelques figures usuelles :

Losange de côté c	Carré de côté c	Rectangle de longueur L et de largeur l
		
$\mathscr{P} = 4 \times c$		$\mathscr{P} = 2 \times L + 2 \times l$

Périmètre d'un cercle

Pour déterminer le périmètre d'un cercle, on peut utiliser 2 formules :

$P = \pi \times D$ D = diamètre du cercle

$P = 2 \times \pi \times R$ R = rayon du cercle

Exemples :

1) Déterminer le périmètre d'un cercle de diamètre 8 cm

$P = \pi \times D$

$P = \pi \times 8$

$P = 8\pi\ cm$ (affichage calculatrice. Il s'agit de la valeur exacte)

$P \approx 25,1\ cm$ (valeur approchée au dixième)

2) Déterminer le périmètre d'un cercle de rayon 12 cm

$P = 2 \times \pi \times R$

$P = 2 \times \pi \times 12$

$P = 24\pi\ cm$ (affichage calculatrice. Il s'agit de la valeur exacte)

$P \approx 75,4\ cm$ (valeur approchée au dixième)

π est le nombre qui s'obtient en divisant la longueur d'un cercle quelconque par son diamètre. C'est un nombre un peu mystérieux, et pour tout dire fascinant :

– Les Babyloniens prenaient $\frac{25}{8} = 3,125$ comme valeur de π.

– Les Égyptiens avaient estimé que ce nombre était égal à $\frac{256}{81}$, c'est-à-dire environ 3,16.

– Plus tard, Archimède, célèbre savant Grec, estima que π était compris entre $\frac{223}{70} \approx 3,141$ et $\frac{220}{70} \approx 3,143$

– Au XVème siècle, le mathématicien Arabe Al-Kashi calcula 14 décimales de π ;
Au XVIIème siècle, l'Anglais John Machin fut le premier à calculer 100 décimales de π.
Récemment, le Japonais Kanada a calculé grâce à un énorme ordinateur plus de 1 200 000 000 000 décimales de π !
En fait, un petit poème permet de retenir les premières décimales de π ; dans ce poème, le nombre de lettres de chaque mot donne la décimale correspondante. Voyez plutôt :

Que	j'	aime	à	faire	apprendre	ce	nombre
3	1	4	1	5	9	2	6
utile	aux	sages.	Immortel	Archimède,	artiste	ingénieur	...
5	3	5	8	9	7	9	

qui nous donne $\pi \approx 3,14159265358979$

En fait, ce mystérieux nombre π est un nombre que l'on ne peut pas écrire sous la forme d'un nombre décimal ou d'une fraction : il y a une infinité de décimales, et elles ne présentent aucune régularité.....

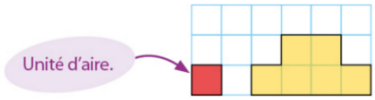
$\pi \approx$ 3,14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510 58209 74944 59230 78164
06286 20899 86280 34825 34211 70679 82148 08651 32823 06647 09384 46095 50582 23172 53594
08128 48111 74502 84102 70193 85211 05559 64462 29489 54930 38196 44288 10975 66593 34461
28475 64823 37867 83165 27120 19091 45648 56692 34603 48610 45432 66482 13393 60726 02491
41273 72458 70066 06315 58817 48815 20920 96282 92540 91715 36436 78925 90360 01133 05305
48820 46652 13841 46951 94151 16094 33057 27036 57595 91953 09218 61173 81932 61179 31051
18548 07446 23799 62749 56735 18857 52724 89122 79381 83011 94912 98336 73362 44065 66430
86021 39494 63952 24737 19070 21798 60943 70277 05392 17176 29317 67523 84674 81846 76694
05132 00056 81271 45263 56082 77857 71342 75778 96091 73637 17872 14684 40901 22495 34301
46549 58537 10507 92279 68925 89235 42019 95611 21290 21960 86403 44181 59813 62977 47713
09960 51870 72113 49999 99837 29780 49951 05973 17328 16096 31859 50244 59455 34690 83026
42522 30825 33446 85035 26193 11881 71010 00313 78387 52886 58753 32083 81420 61717 76691
47303 59825 34904 28755 46873 11595 62863 88235 37875 93751 95778 18577 80532 17122 68066
13001 92787 66111 95909 21642 01989 38095 25720 10654 85863 27886 59361 53381 82796 82303
01952 03530 18529 68995 77362 25994 13891 24972 17752 83479 13151 55748 57242 45415 06959
50829 53311 68617 27855 88907 50983 81754 63746 49393 19255...

Aires

L'aire d'une figure est la mesure de sa surface intérieure

Exemple :

L'aire de cette surface est égale à 6 unités



Unités

Un unité d'aire souvent utilisée est le mètre carré (m^2). 1 m^2 est l'aire d'un carré de côté 1m.

Tableau de conversion :

km^2		hm^2		dam^2		m^2		dm^2		cm^2		mm^2	
			ha		a		ca						
					1	7	5	0	0	0	0		
						4	5	0	0				

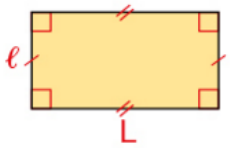
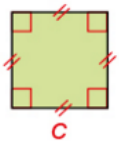
Exemples de conversion :

Convertir 175 m^2 en cm^2.
On place 175 dans le tableau (le chiffre des unités : 5 dans la colonne colorée des m^2)
On complète avec des zéros afin de compléter la colonne colorée des cm^2
175 m^2 = 1 750 000 cm^2

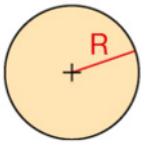
Convertir 4 500 dm^2 en m^2.
On place 4500 dans le tableau (le chiffre des unités : 0 dans la colonne colorée des dm^2)
On place la virgule dans la colonne colorée des m^2
4 500 $dm^2 = 45,00\ m^2 = 45\ m^2$

Aire d'un carré/d'un rectangle

Il faut penser à exprimer les longueurs dans une même unité.

	Rectangle	Carré
		
Aire $\mathscr{A}$	$\mathscr{A} = L \times \ell$	$\mathscr{A} = c \times c$

Aire d'un disque

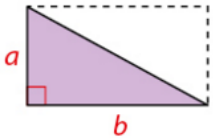
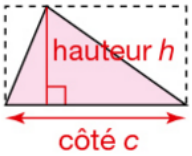
Disque de rayon R	Aire $\mathscr{A}$
	$\mathscr{A} = \pi \times R \times R$ ou $\mathscr{A} = \pi \times R^2$

On dit que R^2 est « le carré » du rayon R.

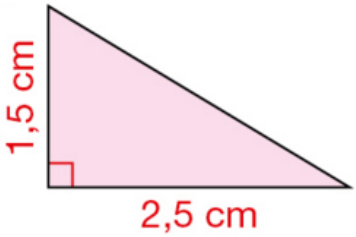
Exemple :
Déterminer l'aire d'un disque de rayon 7 cm

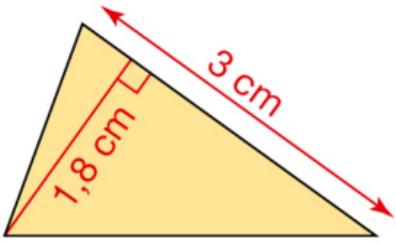
$A = \pi \times R \times R$
$A = \pi \times 7 \times 7$
$A = 49 \times \pi \ cm^2$ (affichage calculatrice)
$A \approx 153,9 \ cm^2$ (valeur approchée au dixième)

Aire d'un triangle

Triangle rectangle	Triangle
	
$\mathscr{A} = (a \times b) : 2$	$\mathscr{A} = (c \times h) : 2$

Exemples :





$A = (1,5 \times 2,5) \div 2$
$A = 1,875 \ cm^2$

$A = (3 \times 1,8) \div 2$
$A = 2,7 \ cm^2$

Volumes

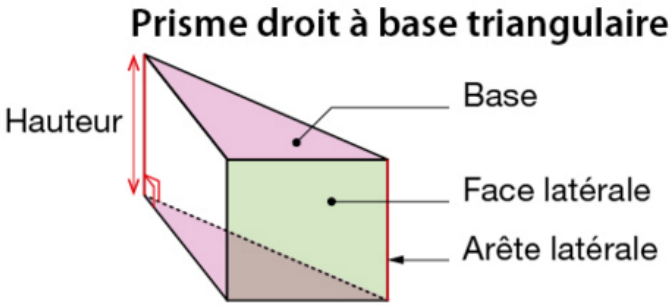
Parallélépipède rectangle

Un parallélépipède rectangle (ou pavé droit) est un solide dont les six faces sont des rectangles

Une représentation en perspective cavalière permet de visualiser ses 6 faces, ses 8 sommets et ses 12 arêtes.

Prisme droit

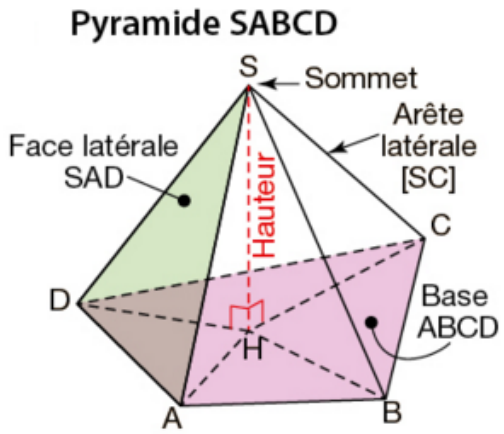
Un prisme droit est un solide qui possède :
deux polygones superposables pour faces parallèles appelés bases
des rectangles pour toutes les autres faces appelées faces latérales



Pyramide

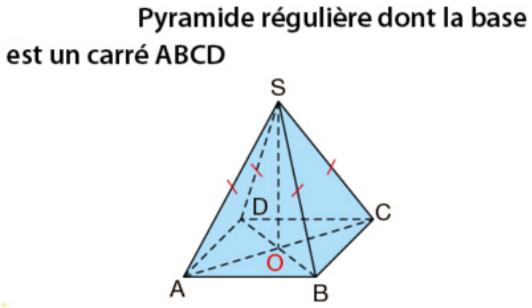
Une pyramide est un solide dont :
une face est un polygone appelé base
les autres faces sont des triangles qui ont un sommet commun appelé le sommet de la pyramide

La hauteur d'une pyramide se sommet S est le segment [SH] porté par la droite perpendiculaire en H à la base.



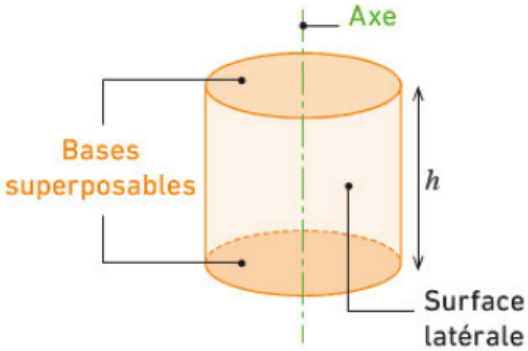
Pyramide régulière

Une pyramide est dite régulière lorsque:
sa base est un polygone régulier (carré, triangle équilatéral, ...)
ses faces latérales sont des triangles isocèles superposables

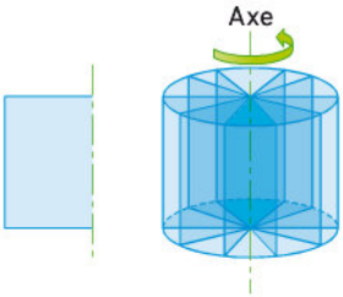


Cylindre de révolution

Un cylindre (de révolution) est un solide qui a :
deux disques superposables et parallèles appelés bases
une surface entourant les bases dont le patron est un rectangle appelée surface latérale

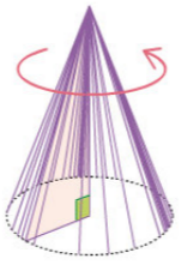


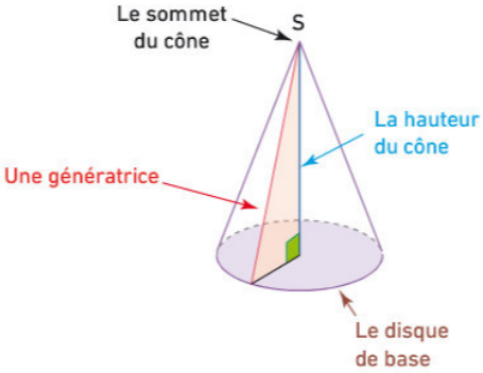
Remarque : on obtient un cylindre de révolution en faisant tourner un rectangle autour d'un de ses côtés. Le rayon d'un cylindre est le rayon de ses bases.



Cône de révolution

Un cône de révolution est un solide obtenu en faisant tourner un triangle rectangle autour de l'un des côtés de son angle droit

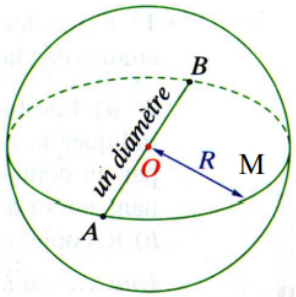




Sphère/boule

Une sphère de centre O et de rayon r est l'ensemble des points M de l'espace tels que OM=r.

Une boule de centre O et de rayon r est l'ensemble des points M de l'espace tels que OM $\leqslant$ r

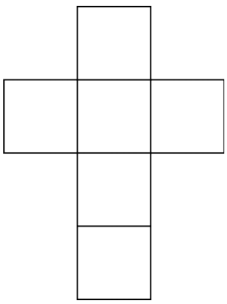


Patron d'un solide

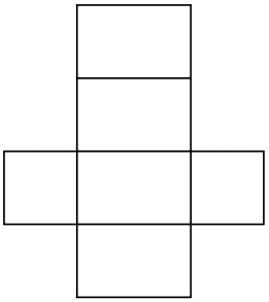
Un patron est une figure plane qui, par pliage, permet d'obtenir un solide.

Exemples :

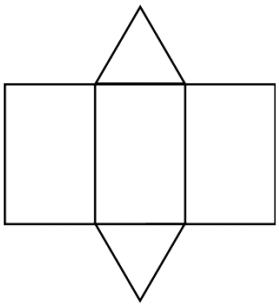
cube



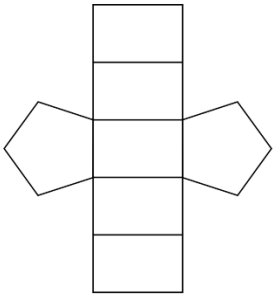
pavé droit



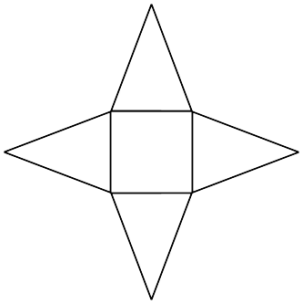
prisme droit à base triangulaire



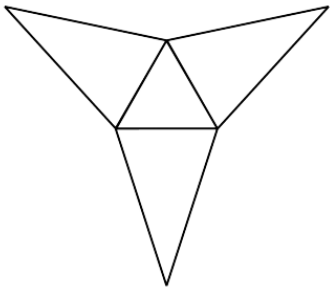
prisme droit à base pentagonale



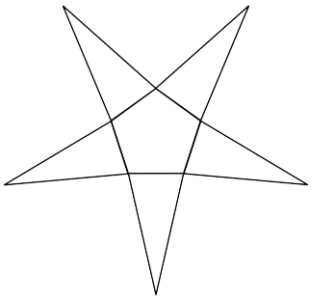
pyramide à base carrée



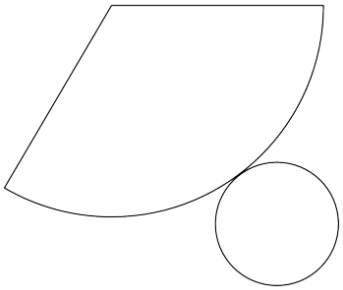
pyramide à base triangulaire



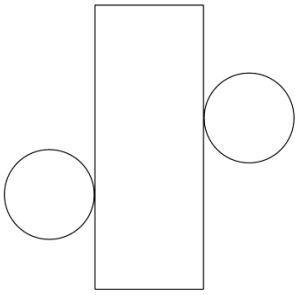
pyramide à base pentagonale



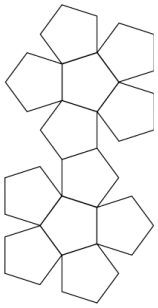
cône



cylindre



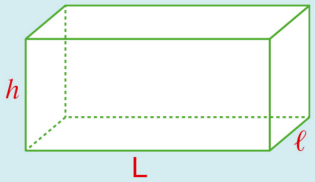
dodécaèdre



Formulaire

Volume d'un parallélépipède rectangle

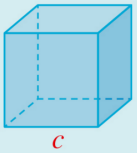
$\mathcal{V} = h \times L \times \ell$



Volume d'un cube de côté c

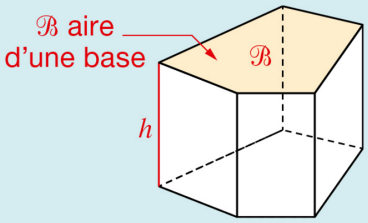
$\mathcal{V} = c \times c \times c$

ou $\mathcal{V} = c^3$



Volume d'un prisme droit de base d'aire $\mathcal{B}$ et de hauteur h

$\mathcal{V} = \mathcal{B} \times h$

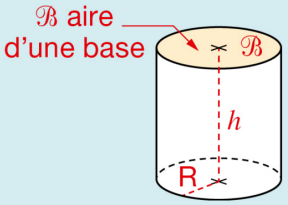


Volume d'un cylindre de révolution de base d'aire $\mathcal{B}$ et de hauteur h

$\mathcal{V} = \mathcal{B} \times h$

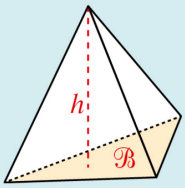
ou, avec R rayon d'une base :

$\mathcal{V} = \pi \times R^2 \times h$



Volume d'une pyramide de base d'aire $\mathcal{B}$ et de hauteur h

$\mathcal{V} = (\mathcal{B} \times h) : 3$

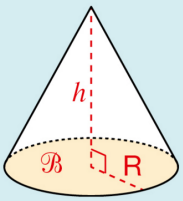


Volume d'un cône de révolution de base d'aire $\mathcal{B}$ et de hauteur h

$\mathcal{V} = (\mathcal{B} \times h) : 3$

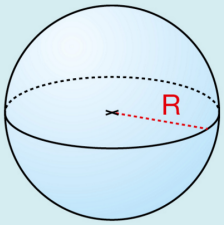
ou, avec R rayon de la base :

$\mathcal{V} = (\pi \times R^2 \times h) : 3$



Volume d'une boule de rayon R

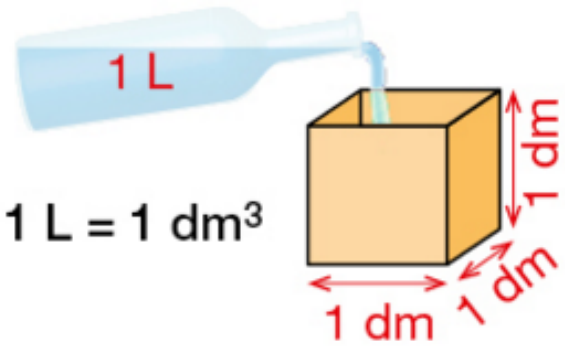
$\mathcal{V} = (4 \times \pi \times R^3) : 3$



Remarque : Toutes les longueurs intervenant dans une formule de volume doivent être exprimées dans la même unité de longueur

Les unités de volume

km^3			hm^3			dam^3			m^3			dm^3			cm^3			mm^3		
											kL	hL	daL	L	dL	cL	mL			



Triangles

Vocabulaire

ABC est un triangle : c'est un polygone à 3 côtés.

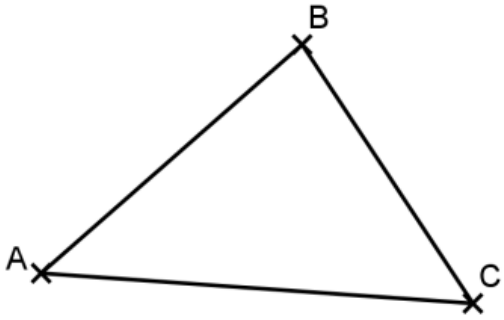
[AB], [AC] et [BC] sont ses trois côtés.

A, B et C sont les trois sommets.

A est le sommet opposé au côté [BC].

B est le sommet opposé au côté [AC].

C est le sommet opposé au côté [AB].



Construire un triangle connaissant les longueurs des trois côtés

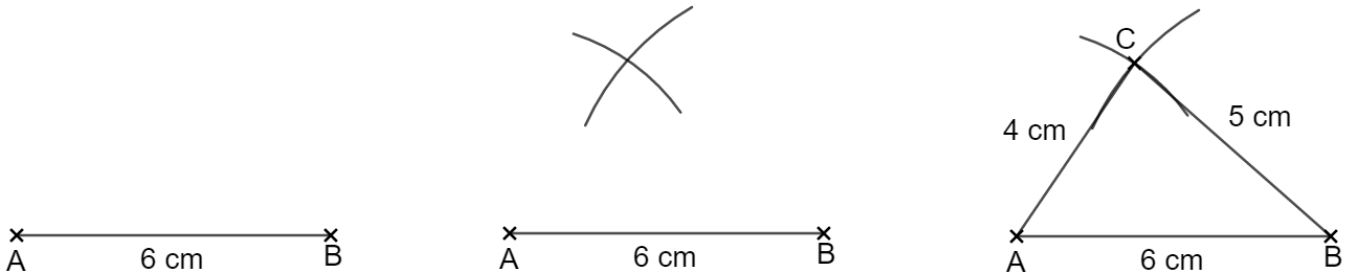
Exemple : construire un triangle ABC tel que AB = 6 cm, AC = 4 cm et BC = 5 cm

1) Tracer le segment [AB].

2) A l'aide du compas, tracer le cercle de centre B et de rayon 5 cm.

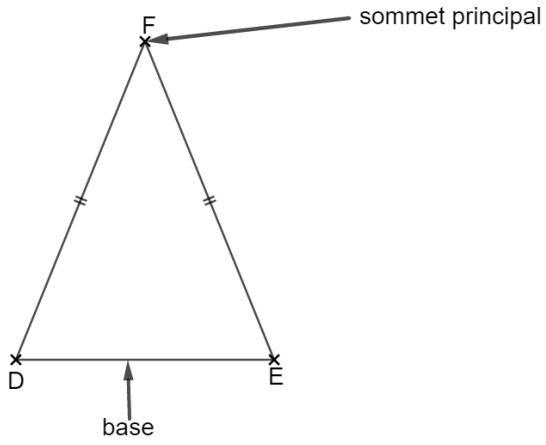
3) A l'aide du compas, tracer le cercle de centre A et de rayon 4 cm.

4) Choisir un des deux points d'intersection des cercles et le nommer C. Tracer le triangle ABC.



Le triangle isocèle

Un triangle isocèle est un triangle qui a deux côtés de même longueur



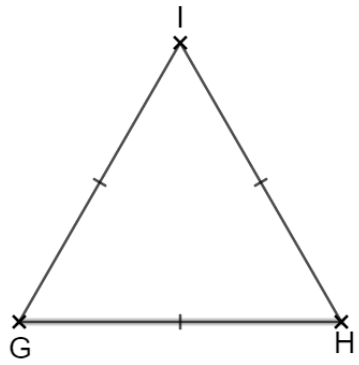
Propriétés :

Si DEF est un triangle isocèle en F, alors FD = FE.

Si FD = FE, alors DEF est un triangle isocèle en F.

Le triangle équilatéral

Un triangle équilatéral est un triangle qui a trois côtés de même longueur



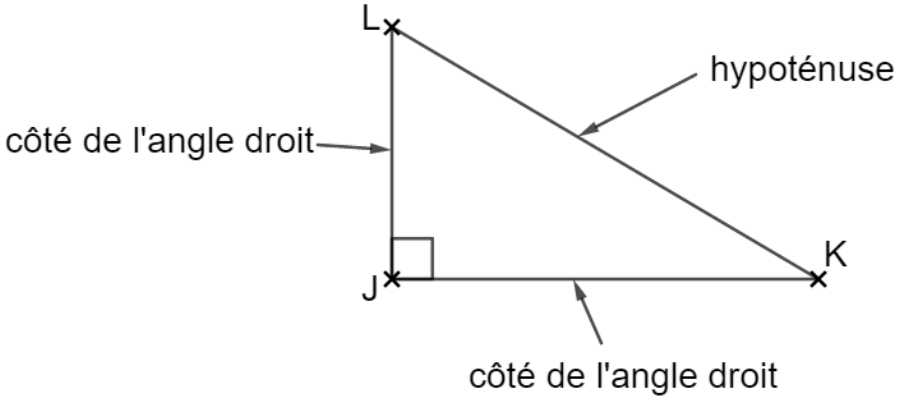
Propriétés :

Si GHI est un triangle équilatéral, alors GH =HI =GI.

Si GH = HI = GI, alors GHI est un triangle équilatéral.

Le triangle rectangle

Un triangle rectangle est un triangle avec deux côtés perpendiculaires



Propriétés :

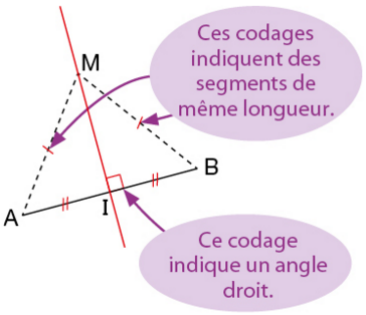
Si JKL est un triangle rectangle en J, alors (JK) est perpendiculaire à (JL)

Si (JK) est perpendiculaire à (JL), alors JKL est un triangle rectangle en J.

Droites particulières

Médiatrice d'un segment

La médiatrice d'un segment est la droite qui est perpendiculaire à ce segment et qui passe par son milieu.



Propriété n°1

Si un point appartient à la médiatrice d'un segment, alors ce point est à la même distance des extrémités de ce segment

Propriété n°2 :

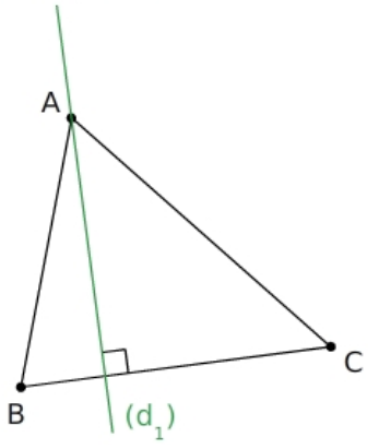
Si un point est à la même distance des extrémités d'un segment, alors ce point appartient à la médiatrice de ce segment

Hauteurs d'un triangle

Définition

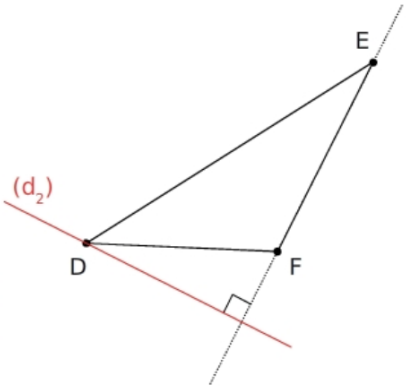
Dans un triangle, une hauteur est une droite qui passe par un sommet et qui est perpendiculaire au côté opposé à ce sommet.

Exemples :



Dans le triangle ABC, le droite (d_1) passe par le sommet A et est perpendiculaire au côté [BC]. On dit que (d_1) est la hauteur issue de A dans le triangle ABC.

Dans le triangle DEF, le droite (d_2) passe par le sommet D et est perpendiculaire au côté [EF]. On dit que (d_2) est la hauteur issue de D dans le triangle DEF.



Inégalité triangulaire

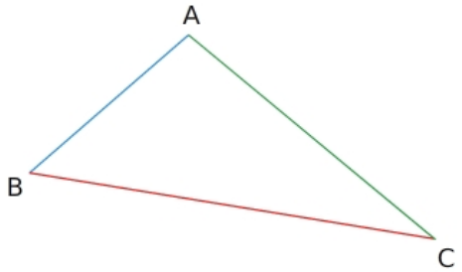
Propriété

Dans un triangle, la longueur de chaque côté est inférieure à la somme des longueurs des deux autres côtés.

$AB < AC + BC$

$BC < AB + AC$

$AC < AB + BC$



Remarque :

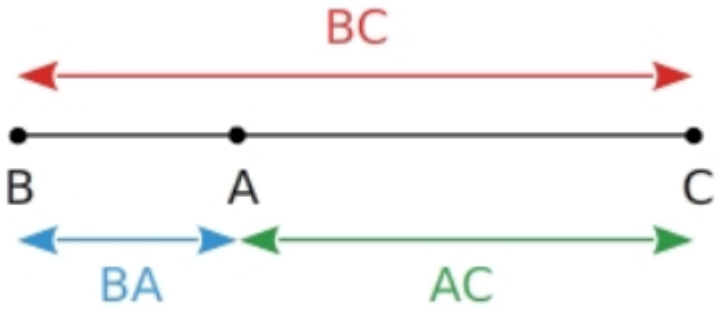
On peut interpréter l'inégalité $BC < AB + AC$ en remarquant que le chemin le plus court pour aller du point B au point C est la ligne droite.

Propriétés

Si un point A appartient au segment [BC] alors BC=AB+AC

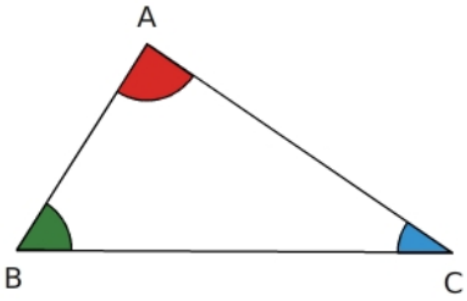
Si trois points A, B et C sont tels que BC=AB+AC alors le point A appartient au segment [BC].

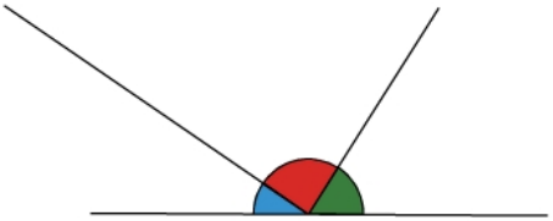
Autrement dit les points A, B et C sont alignés.



Somme des angles dans un triangle

Dans un triangle, la somme des mesures des angles est égale à 180°.





$$\widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180°$$

Exemple :

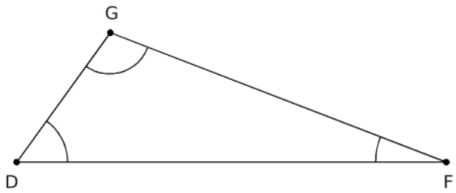
Dans le triangle ci-contre, on sait que :

$\widehat{GDF} = 48°$ et $\widehat{GFD} = 32°$

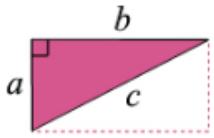
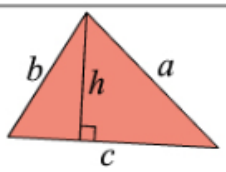
La somme des mesures des angles du triangle GDF est égale à 180°. on a donc :

$\widehat{DGF} = 180 - 48 - 32$

$\widehat{DGF} = 100°$



Périmètre et aire

Triangle rectangle		$\mathscr{P} = a + b + c$	$\mathscr{A} = \frac{a \times b}{2}$
Triangle quelconque		$\mathscr{P} = a + b + c$	$\mathscr{A} = \frac{c \times h}{2}$

QUADRILATÈRES

Définitions, propriétés

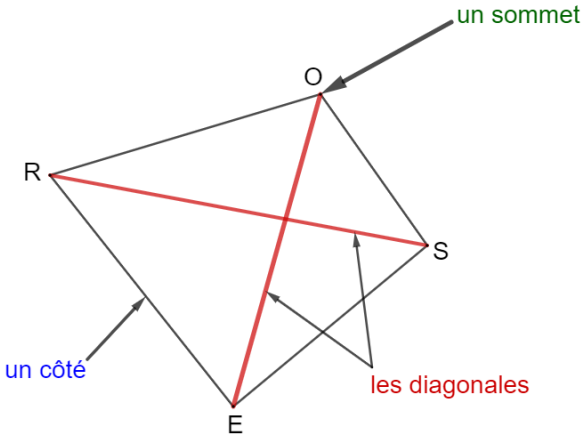
Le quadrilatère

1) Définition

Un quadrilatère est une figure géométrique à 4 côtés
{quadrilatère, du latin « quadri » = quatre
et « latère » = côté}

2) Vocabulaire

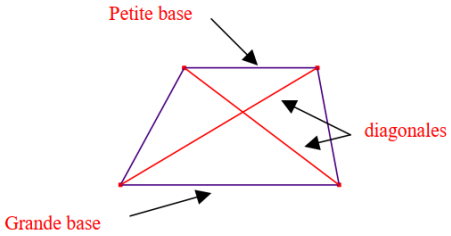
- ce quadrilatère est un quadrilatère non-croisé
- il peut se nommer : ROSE ou RESO ou OSER ou SERO ou EROS ou RESO ou ORES ou SORE
- R, E, S et O sont les quatre sommets
- [RO], [OS], [SE] et [ER] sont les quatre côtés
- [RS] et [OE] sont les diagonales
- [RO] et [SE] sont deux côtés opposés
- [ES] et [SO] sont deux côtés consécutifs



Le trapèze

Définition

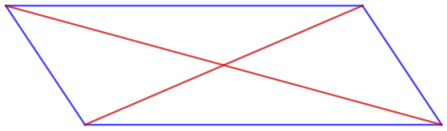
Un trapèze est un quadrilatère ayant deux côtés parallèles.
Ces deux côtés sont appelés « bases du trapèze ».



Le parallélogramme

Définition

Un parallélogramme est un quadrilatère qui a ses côtés opposés deux à deux parallèles.

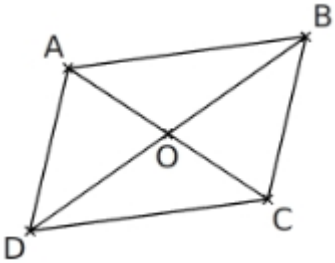


Propriété n°1

Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses côtés opposés sont parallèles

ABCD est un parallélogramme

(AB) est parallèle à (CD)
(AD) est parallèle à (BC)

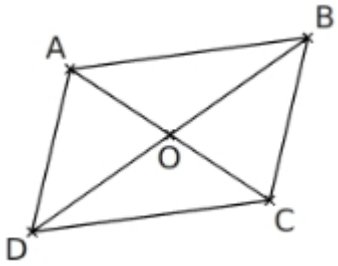


Propriété n°2

Un parallélogramme a un centre de symétrie qui est le point d'intersection de ses diagonales

ABCD est un parallélogramme de centre O.

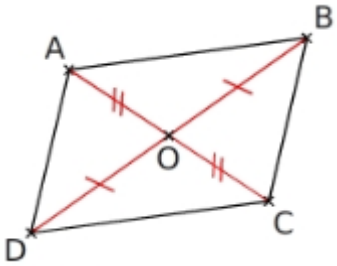
- O est le centre de symétrie du parallélogramme ABCD
- [AB] et [CD] sont symétriques par rapport à O.
- [AD] et [BC] sont symétriques par rapport à O.
- Les angles opposés sont symétriques par rapport à O.



Propriété n°3 :

Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses diagonales se coupent en leur milieu

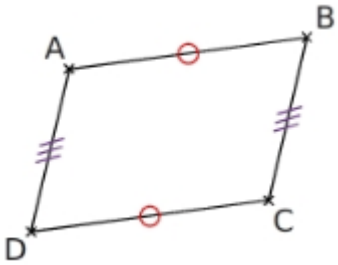
Si ABCD est un parallélogramme
Alors ses diagonales [AC] et [BD] se coupent en leur milieu.



Propriété n°4 :

Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses côtés opposés ont la même longueur.

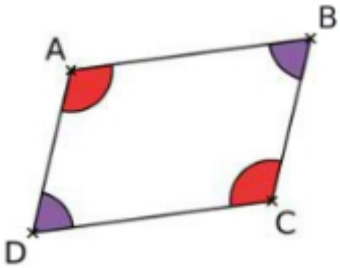
Si ABCD est un parallélogramme
Alors ses côtés opposés ont la même longueur.
Donc : $AB = CD$ *et* $AD = BC$



Propriété n°5 :

Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses angles opposés ont la même mesure.

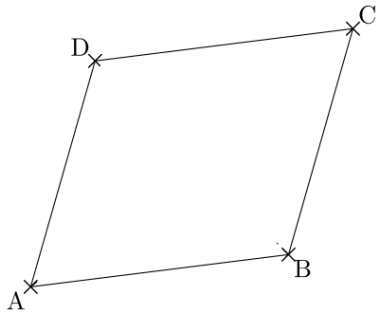
Si ABCD est un parallélogramme
Alors ses angles opposés ont la même mesure.
Donc : $\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$ et $\widehat{BAD} = \widehat{BCD}$



Propriété n°6 :

Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses angles consécutifs sont supplémentaires (c'est-à-dire que la somme de leurs mesures vaut 180°).

Si ABCD est un parallélogramme alors :
$\widehat{A} + \widehat{B} = 180°$
$\widehat{B} + \widehat{C} = 180°$
$\widehat{C} + \widehat{D} = 180°$
$\widehat{D} + \widehat{A} = 180°$



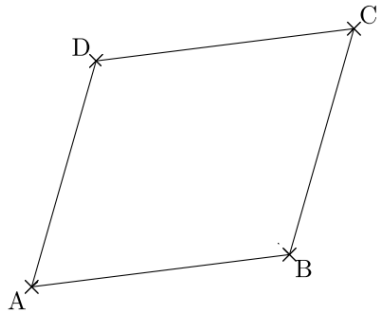
Reconnaître un parallélogramme

Propriété n°1 :

Si un quadrilatère a ses côtés opposés parallèles alors c'est un parallélogramme

Si (AB) est parallèle à (CD)
et (AD) est parallèle à (BC)

Alors ABCD est un parallélogramme

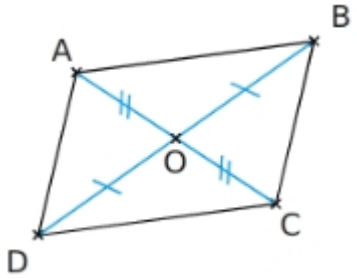


Propriété n°2 :

Si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu alors c'est un parallélogramme.

Si O est le milieu de [AC] et de [BD]

Alors ABCD est un parallélogramme.

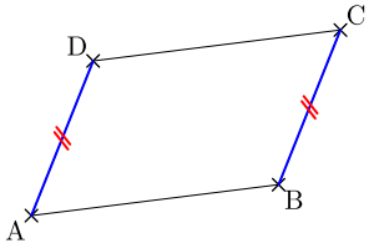


Propriété n°3 :

Si un quadrilatère (non croisé) a deux côtés opposés parallèles et de même longueur, alors ce quadrilatère est un parallélogramme

Si (AD) est parallèle à (BC)
et si AD = BC

Alors ABCD est un parallélogramme.

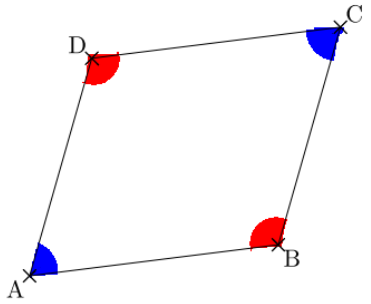


Propriété n°4 :

Si un quadrilatère a ses angles opposés de la même mesure, alors ce quadrilatère est un parallélogramme

Si $\widehat{ADC} = \widehat{ABC}$ et si $\widehat{DAB} = \widehat{DCB}$

Alors ABCD est un parallélogramme



Le rectangle

Définition

Un rectangle est un quadrilatère qui a 4 angles droits.

Propriétés:

Les côtés opposés d'un rectangle sont parallèles

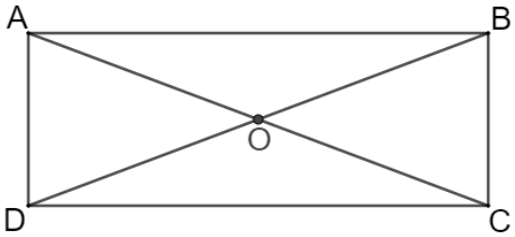
Les côtés opposés d'un rectangle ont la même longueur

Les angles d'un rectangle mesurent tous 90°

Les diagonales d'un rectangle ont la même longueur et se coupent en leur milieu.

ABCD est un rectangle

(AB) est parallèle à (CD) (AD) est parallèle à (BC)
AB = CD et AD = BC
$\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{D} = 90°$
AC = BD
O est le milieu de [AC] et de [BD]
On a donc OA=OB=OC=OD



Reconnaître un rectangle

Si un quadrilatère a 3 angles droits alors c'est un rectangle

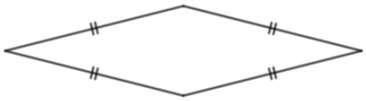
Si un parallélogramme a un angle droit alors c'est un rectangle

Si un parallélogramme a ses diagonales de la même longueur alors c'est un rectangle

Le losange

Définition

Un losange est un quadrilatère qui a ses 4 côtés de même longueur.



Propriétés :

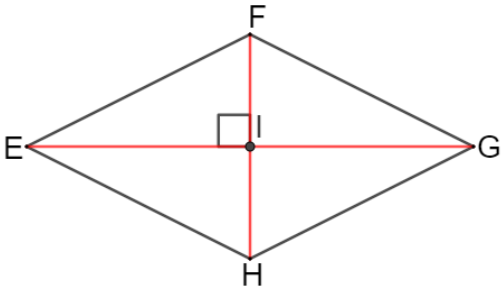
Les cotés opposés du losange sont parallèles

Tous les côtés d'un losange ont la même longueur

Les diagonales d'un losange sont perpendiculaires

Les diagonales d'un losange se coupent en leur milieu

EFGH est un losange



(EF) est parallèle à (GH) et (FG) est parallèle à (EH)
EF=FG=GH=HE
(FH) $\perp$ (EG)
I est le milieu de [FH]
I est le milieu de [EG]

Reconnaître un losange

Si un quadrilatère a ses quatre côtés de la même longueur alors c'est un losange

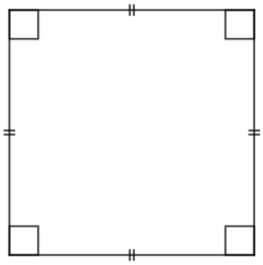
Si un parallélogramme a deux côtés consécutifs de même longueur alors c'est un losange

Si un parallélogramme a ses diagonales perpendiculaires alors c'est un losange

Le carré

Définition

Un carré est un quadrilatère qui a 4 angles droits et 4 côtés de même longueur.



Propriétés :

Un carré étant à la fois un rectangle et un losange, il possède les propriétés de ces deux quadrilatères particuliers.

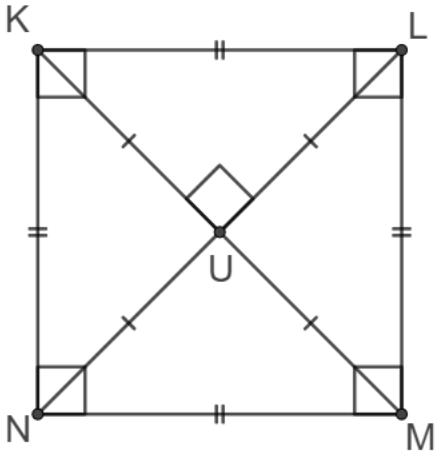
Les côtés opposés d'un carré sont parallèles

Tous les côtés d'un carré ont la même longueur

Les angles d'un carré mesurent tous 90°

Les diagonales d'un carré ont la même longueur, se coupent en leur milieu et sont perpendiculaires.

KLMN est un carré



(KL) est parallèle à (MN) (KN) est parallèle à (LM)
KL = LM = MN = NK
$\widehat{K} = \widehat{L} = \widehat{M} = \widehat{N} = 90°$
[KM] et [LN] sont perpendiculaires
KM = LN
U est le milieu de [KM] et de [LN]
On a donc UK=UL=UM=UN

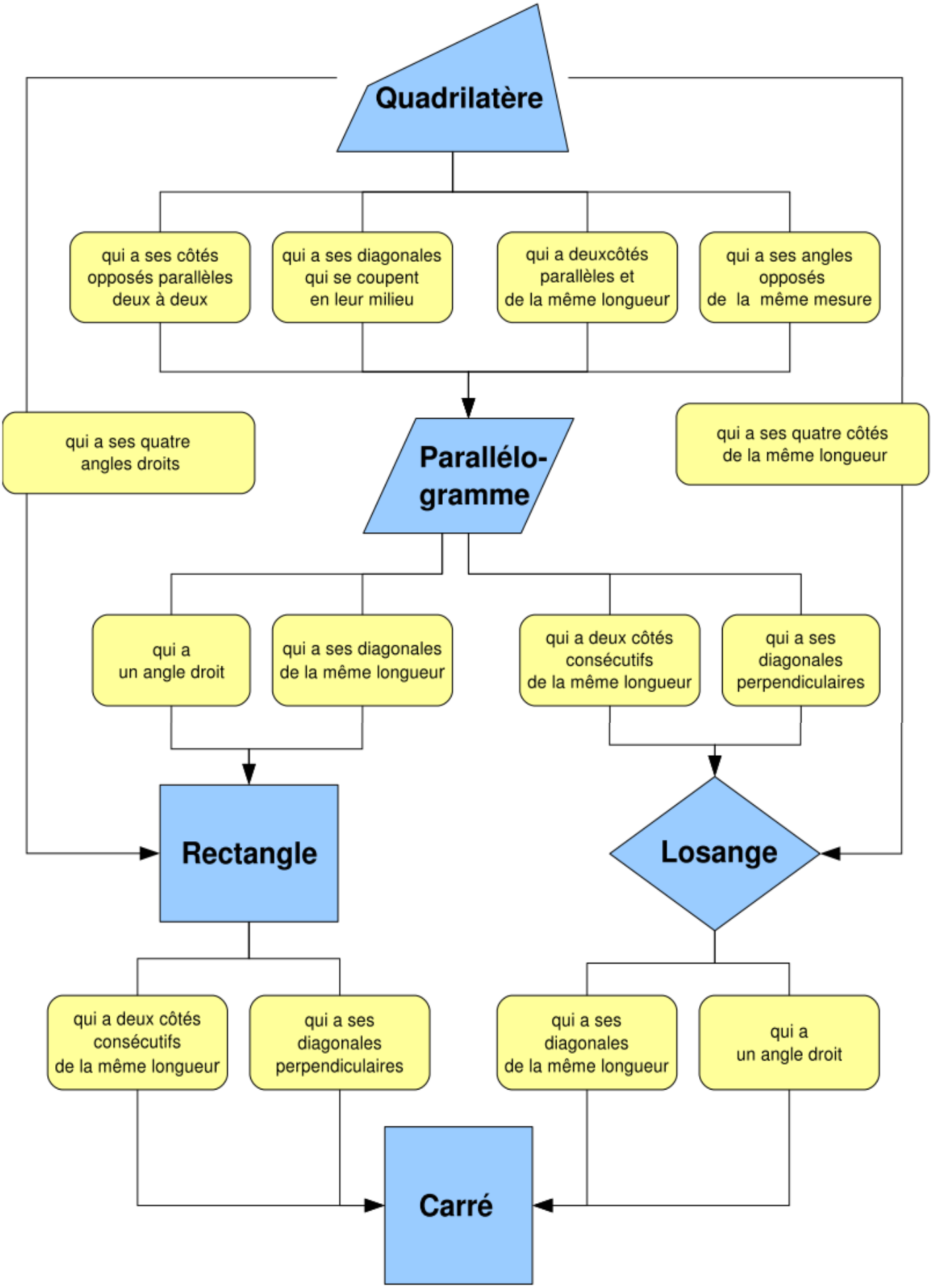
Reconnaître un carré

Si un rectangle a deux côtés consécutifs de la même longueur alors c'est un carré

Si un rectangle a ses diagonales perpendiculaires alors c'est un carré

Si un losange a ses diagonales de même longueur alors c'est un carré

Si un losange a un angle droit alors c'est un carré


Quadrilatère
qui a ses côtés opposés parallèles deux à deux
qui a ses diagonales qui se coupent en leur milieu
qui a deuxcôtés parallèles et de la même longueur
qui a ses angles opposés de la même mesure
qui a ses quatre angles droits
Parallélo-gramme
qui a ses quatre côtés de la même longueur
qui a un angle droit
qui a ses diagonales de la même longueur
qui a deux côtés consécutifs de la même longueur
qui a ses diagonales perpendiculaires
Rectangle
Losange
qui a deux côtés consécutifs de la même longueur
qui a ses diagonales perpendiculaires
qui a ses diagonales de la même longueur
qui a un angle droit
Carré

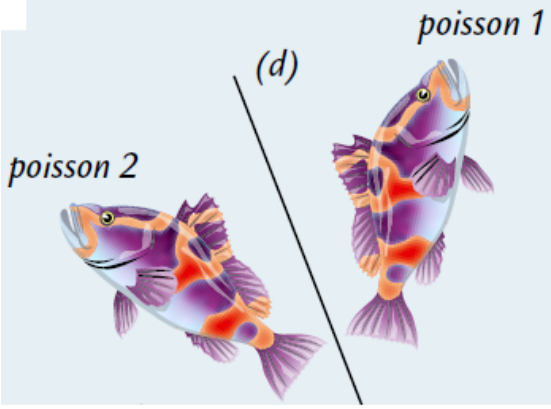
Transformations

Symétrie axiale

Figures symétriques

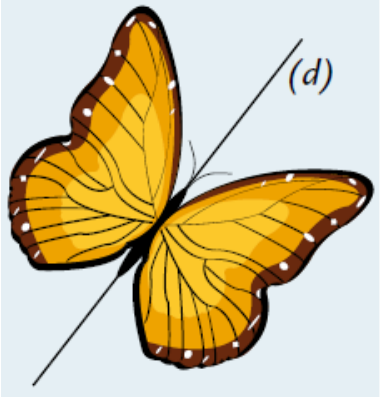
Deux figures sont symétriques par rapport à une droite (d) si, lorsqu'on plie le long de cette droite (d), elles se superposent exactement.

Ici :
les deux poissons sont symétriques par rapport à la droite (d).
On dit également que :
le poisson 1 est le symétrique du poisson 2 par rapport à la droite (d).
Le poisson 2 est le symétrique du poisson 1 par rapport à la droite (d).
<u>Remarque</u> : Une figure et sa figure symétrique ont donc les mêmes dimensions.



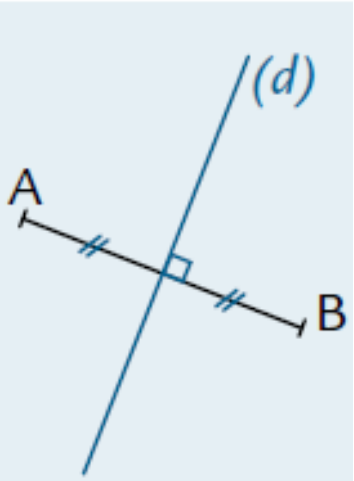
Axe de symétrie :

On dit qu'une droite *(d)* est un axe de symétrie d'une figure lorsque cette figure est sa propre symétrique par rapport à la droite *(d)*.
Ici, le symétrique du papillon par rapport à la droite *(d)* est lui-même. Chaque « demi-papillon » est le symétrique de l'autre.

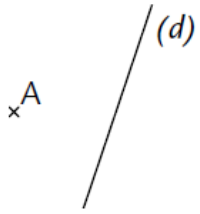


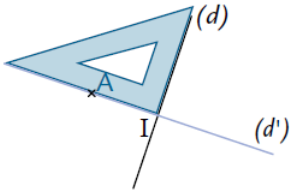
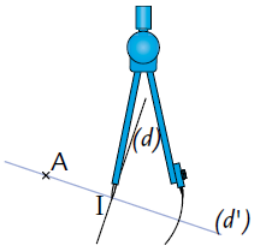
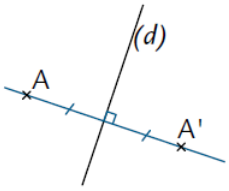
Symétrique d'un point

Dire que A' est le symétrique de A par rapport à *(d)* signifie que :
la droite (AA') est perpendiculaire à *(d)*
et la droite *(d)* coupe [AA'] en son milieu.
Ceci revient à dire que la droite *(d)* est la médiatrice du segment [AA'].



Tracer à l'aide d'une équerre le point A', symétrique du point A par rapport à la droite *(d)*



1- On trace *(d')* la perpendiculaire à *(d)* passant par A. Les droites *(d)* et *(d')* se coupent en I. 	**2-** On prend la longueur AI comme écartement de compas et on trace un arc de cercle coupant *(d')* de l'autre côté de I. 	**3-** On code la figure. 

Remarque : le point A est lui aussi le symétrique du point A' par rapport à la droite (d).

Propriétés de la symétrie axiale

Par une symétrie axiale d'axe Δ :

un segment est transformé en un segment de même longueur

un cercle est transformé en un cercle de même rayon

un angle est transformé en un angle de même mesure

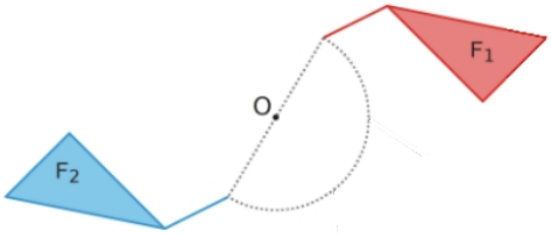
une figure est transformée en une figure de même aire.

Symétrie centrale

Définition

Deux figures sont symétriques par rapport à un point O lorsqu'elles se superposent après un demi-tour autour de ce point.

Cette symétrie est appelée symétrie centrale de centre O



La figure F_2 est le symétrique de la figure F_1 par rapport au point O.

La figure F_1 est le symétrique de la figure F_2 par rapport au point O.

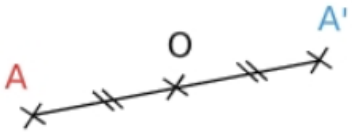
Les figures F_1 et F_2 sont symétriques par rapport au point O

Le point O est le centre de la symétrie qui transforme la figure F_1 en la figure F_2

Symétrique d'un point

Définition

Les points A et A' sont symétrique par rapport au point O lorsque le point O est le milieu du segment [AA'].

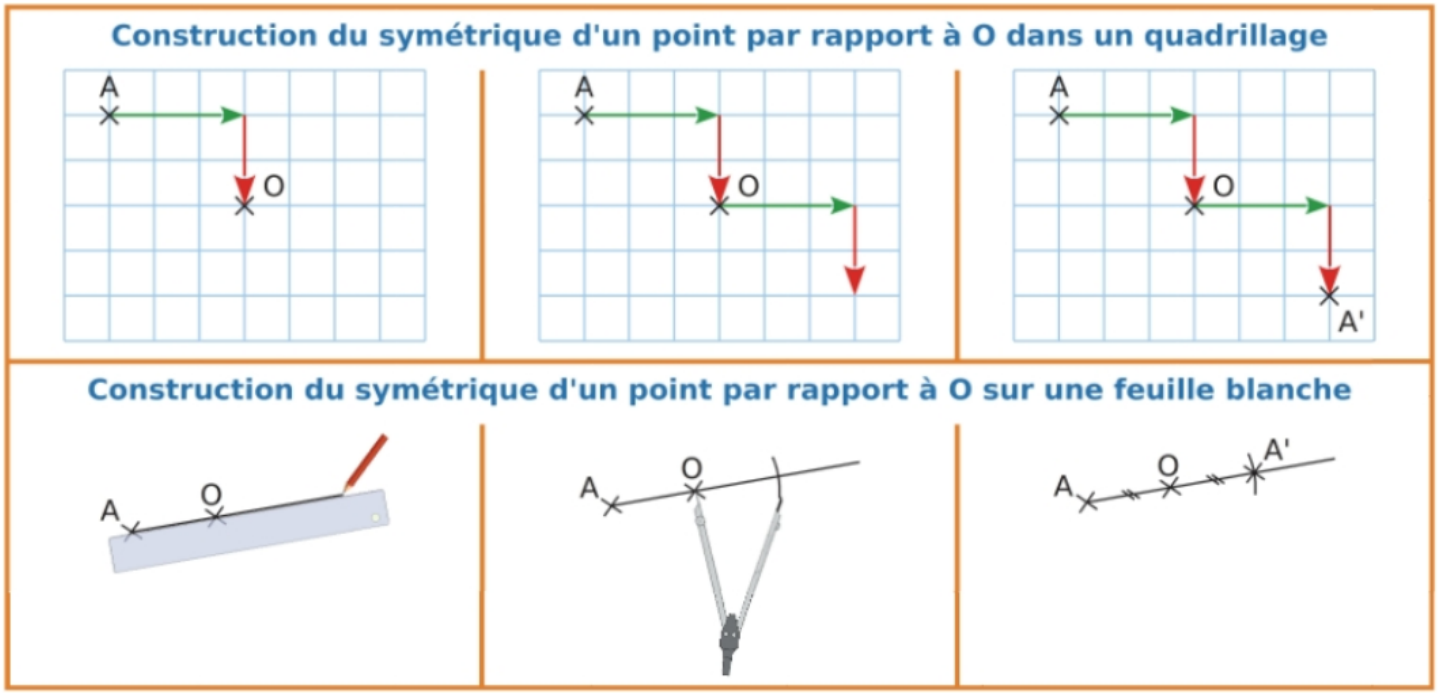


Le symétrique de **A** par rapport à O est **A'**

Le symétrique de **A'** par rapport à O est **A**

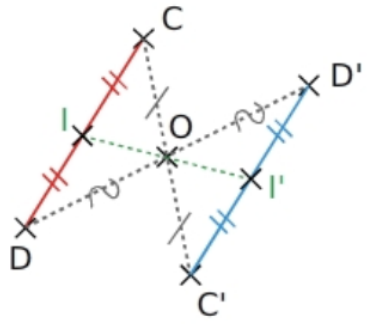
A et **A'** sont symétriques par rapport à O

Le symétrique de O par rapport à O est le point O lui-même

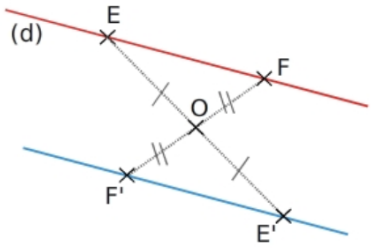


Propriétés

Le symétrique d'un segment par rapport à un point est un segment de même longueur. La symétrie centrale conserve les longueurs.

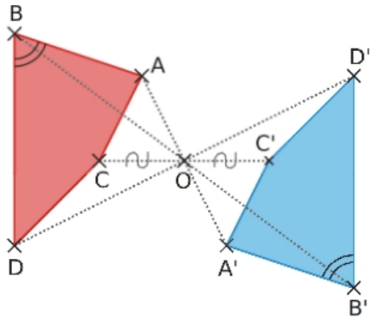


Le symétrique d'une droite par rapport à un point est une droite qui lui est parallèle. La symétrie centrale conserve l'alignement.

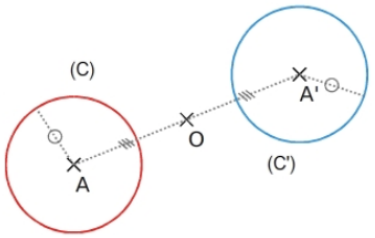


Le symétrique d'un polygone par rapport à un pont est un polygone de même forme et de mêmes mesures.

La symétrie centrale conserve la mesure des angles, les périmètres et les aires.

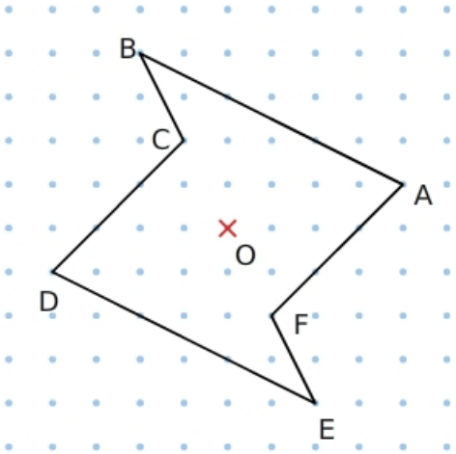


Le symétrique d'un cercle par rapport à un point est un cercle. Les deux cercles symétriques ont le même rayon et leurs centres sont également symétriques par rapport à ce point.



Centre de symétrie

Le point O est le centre de symétrie d'une figure si le symétrique de cette figure par rapport à O est la figure elle-même.



Par la symétrie centrale de centre O,

le point A a pour symétrique D

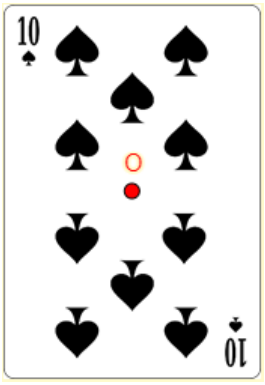
le point B a pour symétrique E

le point C a pour symétrique F

Donc le symétrique du polygone ABCDEF est lui-même

Ce polygone admet donc un centre de symétrie

qui est le point **O**



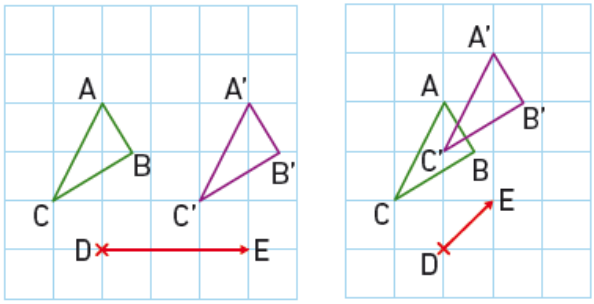
Translation

Définition

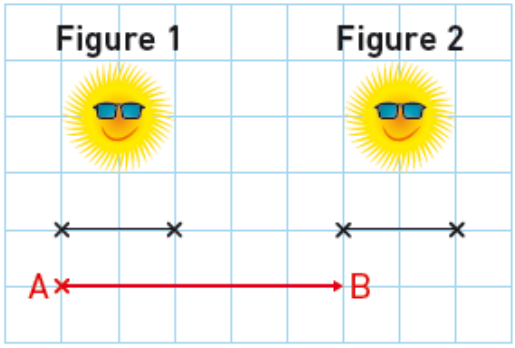
Transformer un point ou une figure par **translation**, c'est faire glisser ce point ou cette figure selon une direction, un sens et une longueur donnés.

Exemples :

Le triangle A'B'C' est l'image du triangle ABC par la translation qui transforme point D en E.

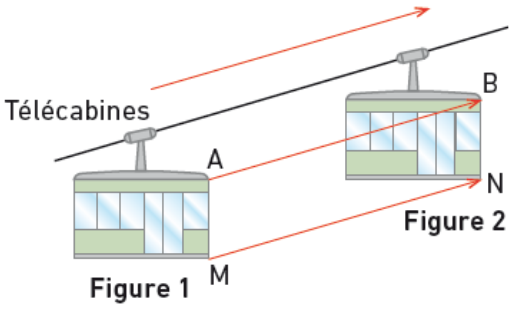


La Figure 2 est l'image de la Figure 1 par la translation qui transforme A en le B.



Notation

La translation est symbolisée par une **flèche** qui donne la direction, le sens et la longueur de ce déplacement.



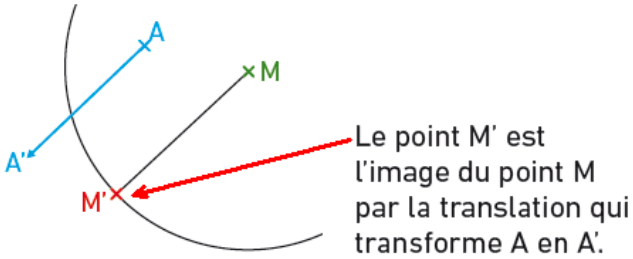
Exemple :

La figure 2 est l'image de la figure 1 par la translation qui transforme A en B, mais aussi M en N.
La translation qui transforme A en B peut être nommer la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$

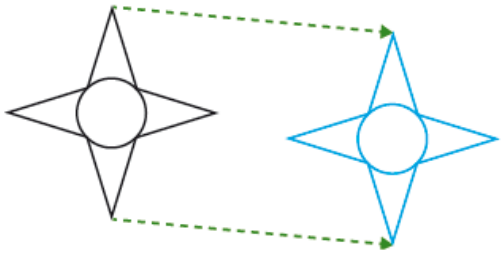
Construction

Pour construire M', l'image du point M par la translation qui transforme A en A':

On trace la droite parallèle à (AA') passant par M;
avec un compas, on reporte la distance AA' dans le sens de A vers A' à partir du point M. On obtient le point M'.



Propriétés



Une translation conserve l'alignement, les longueurs, les angles et les aires.

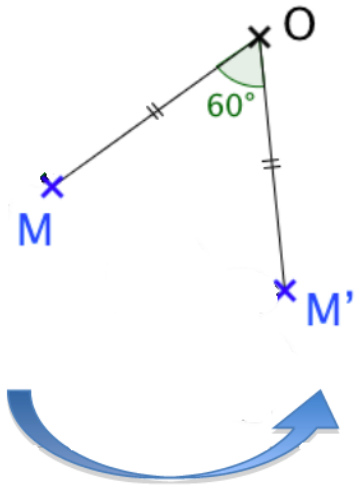
Exemple :

La figure bleue est l'image de la figure noire par translation.
Les deux figures sont superposables.

Rotation

Appliquer une rotation sur une figure, c'est faire tourner la figure autour d'un centre selon un angle donné et dans un sens donné (horaire ou anti-horaire)

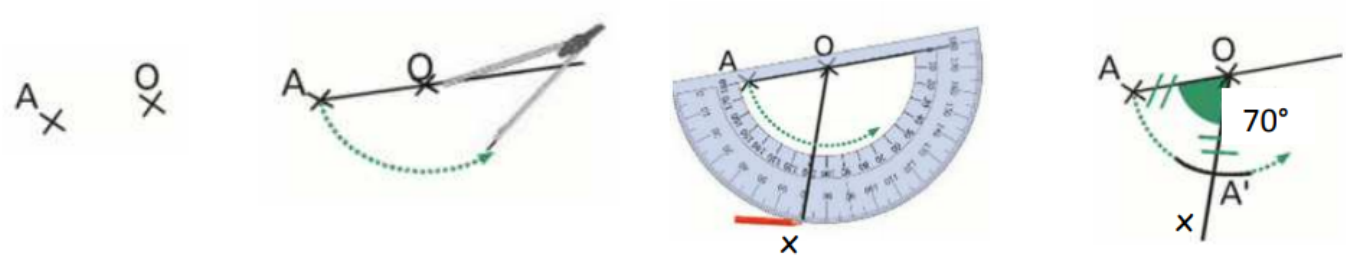
Remarque : le sens anti-horaire est également appelé <u>sens direct</u>.



M' est l'image de M par la rotation de **centre O** et d'**angle 60° dans le sens inverse des aiguilles d'une montre** signifie que :

- $\widehat{MOM'} = 60°$ de M vers M' dans le sens de la flèche,
- $MO = OM'$

Construire le point A', image du point A par une rotation de centre O et d'angle 70° dans le sens anti-horaire.



Avec le compas, on trace un arc de cercle de centre O passant par A dans le sens antihoraire

Avec un rapporteur et une règle, on trace la demi-droite [Ox) telle que $\widehat{A0x} = 70°$

Le point A' est le point d'intersection entre cette demi-droite et l'arc de cercle.

Propriété (admise) : La rotation conserve l'alignement, les angles, les longueurs et les aires.

Remarque : La rotation de centre O et d'angle 180° est la symétrie centrale de centre O

Agrandissement – Réduction

Propriété

Lors d'un agrandissement ou d'une réduction de rapport k (de coefficient k)

Toutes les longueurs sont multipliées par k

La mesure des angles est conservée

Si $k > 1$ alors il s'agit d'un agrandissement

Si $0 < k < 1$ alors il s'agit d'une réduction

Exemple 1

A'B'C' est une réduction du triangle ABC. Le coefficient de réduction est $\frac{4}{5}$.

Le triangle ABC tel que AB = 10 cm, AC = 7,5 cm et BC = 6 cm

Déterminer les dimensions de A'B'C'

Rédaction :

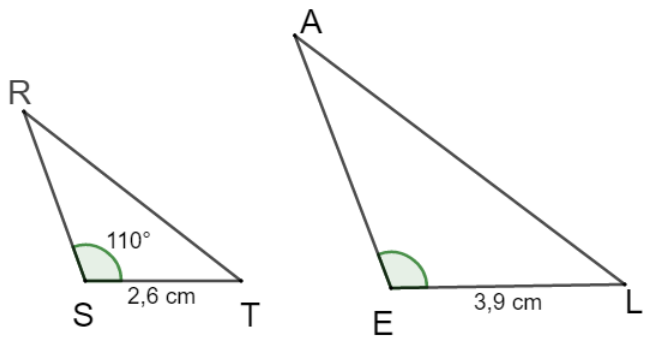
$k = \frac{4}{5}$

$$A'B' = k \times AB = \frac{4}{5} \times 10 = 8\ cm$$

$$A'C' = k \times AC = \frac{4}{5} \times 7,5 = 6\ cm$$

$$B'C' = k \times BC = \frac{4}{5} \times 6 = 4,8\ cm$$

Exemple 2



LEA est un agrandissement de RTS

1) Déterminer le coefficient d'agrandissement

2) Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{AEL}$

$$k = \frac{EL}{ST} = \frac{3,9}{2,6} = 1,5$$

Le coefficient d'agrandissement est 1,5

2) Déterminons la mesure de l'angle $\widehat{AEL}$

Je sais que : AEL est un agrandissement de RST $\begin{cases} de\ coefficient\ 1,5 \\ de\ rapport\ 1,5 \end{cases}$

$\widehat{RST} = 110°$

Or : Lors d'un agrandissement, la mesure des angles est conservée

Donc : $\widehat{AEL} = \widehat{RST} = 110°$

Exemple 3

IJK est un triangle tel que IJ=7 cm, IK = 4 cm et JK = 6 cm
DEF est un triangle tel que DE = 7,2 cm, DF = 8,4 cm et EF = 5,2 cm.
DEF est-il un agrandissement de IJK ?
Pour commencer, il faut classer les longueurs des côtés des triangles dans l'ordre croissant

IK = 4 cm	JK = 6 cm	IJ = 7 cm
EF = 5,2 cm	DE = 7,2 cm	DF = 8,4 cm

Pour que DEF soit un agrandissement de IJK, il faut que les rapports de longueurs soient égaux

$\frac{EF}{IK} = \frac{5,2}{4} = 1,3$ $\frac{DE}{JK} = \frac{7,2}{6} = 1,2$ $\frac{DF}{IJ} = \frac{8,4}{7} = 1,2$

Donc DEF **n'est pas** un agrandissement de IJK

Effet sur les aires

Propriété :

Dans un agrandissement ou une réduction de rapport k, l'aire d'une surface est multipliée par k^2

$$Nouvelle\ aire = k^2 \times aire\ initiale$$

Exemple 1

Soit un rectangle de longueur 12 cm et de largeur 8 cm
Ce rectangle subit une réduction de rapport 0,6
Calculer l'aire de ce nouveau rectangle

Aire du rectangle initial : $L \times l = 12 \times 8 = 96\ cm^2$
$k = 0,6$
Aire du nouveau rectangle = $k^2 \times$ aire du rectangle initial
Aire du nouveau rectangle = $0,6^2 \times 96$
Aire du nouveau rectangle = 34,56

L'aire du rectangle réduit est $34,56\ cm^2$

Exemple 2

Une surface a une aire de 64 mm^2. Elle subit un agrandissement et cette surface a une aire de 4 cm^2.
Calculer le rapport de l'agrandissement.

Attention : $4\ cm^2 = 400\ mm^2$
Aire de la nouvelle surface = $k^2 \times$ aire de la surface initiale
$400 = k^2 \times 64$
$k^2 = \frac{400}{64} = 6,25$

$k = \sqrt{6,25} = 2,5$

Le rapport d'agrandissement est 2,5

Effet sur les volumes

Propriété

Dans un agrandissement ou une réduction de rapport k, le volume est multipliée par k^3

$$Nouveau\ volume = k^3 \times volume\ initial$$

Exemple

On multiplie par 4 le rayon d'une boule de 450 cm^3
Quel est le volume de cette nouvelle boule ?

$k = 4$
Nouveau volume = $k^3 \times$ volume initial
Nouveau volume = $4^3 \times 450$
Nouveau volume = 28 800 cm^3

Le volume de la nouvelle boule est de 28 800 cm^3

Rappel : 28 800 $cm^3 = 28,8 dm^3 = 28,8\ L$

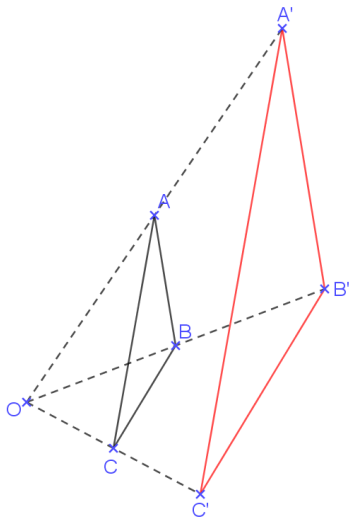
Homothétie

Définition :

Une homothétie de rapport k (k est un nombre relatif) permet d'agrandir ou de réduire une figure par rapport à un point appelé le centre de l'homothétie.

Exemple 1 :

Homothétie de centre O et de rapport 2. H (O ; 2)



A'B'C' est l'image de ABC par l'homothétie de centre O et de rapport 2

A'B'C' est un agrandissement de ABC de rapport 2.

$A'B' = 2 \times AB$ $\quad$ $OA' = 2 \times OA$

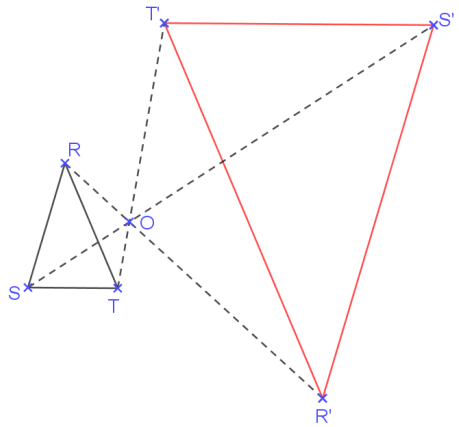
$A'C' = 2 \times AC$ $\quad$ $OB' = 2 \times OB$ $\quad$ O, A, A'

O, B, B' $\quad$ sont alignés

$B'C' = 2 \times BC$ $\quad$ $OC' = 2 \times OC$ $\quad$ O, C, C'

Exemple 2 :

Soit l'homothétie de centre O et de rapport – 3 H (0 ; – 3)



R'S'T' est l'image de RST dans l'homothétie de centre O et de rapport –3

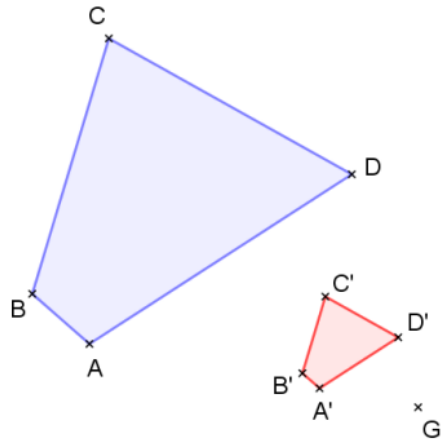
R'S'T' est un agrandissement de rapport 3

<u>Remarque</u>

Si $k > 1$ ou si $k < -1$, alors l'homothétie correspond à un agrandissement.
Si $-1 < k < 1$, alors l'homothétie correspond à une réduction.

Exercice n°1 :

Sur la figure ci-dessous, $A'B'C'D'$ est l'image de $ABCD$ par l'homothétie de centre G et de rapport 0,3.
On a par ailleurs : $AB = 1{,}5\ cm$, $AD = 6{,}4\ cm$, $C'D' = 1{,}8\ cm$
Calculer les longueurs $A'B'$, $A'D'$ et CD.



Solution :

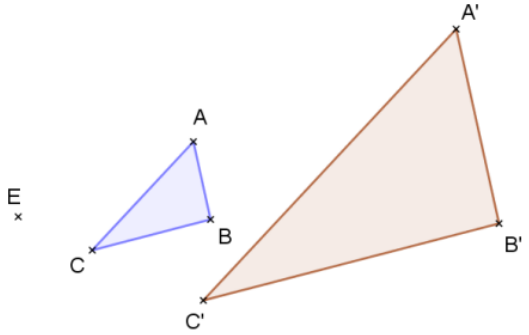
$A'B' = k \times AB$
$A'B' = 0,3 \times 1,5$
$A'B' = 0,45\ cm$

$A'D' = k \times AD$
$A'D' = 0,3 \times 6,4$
$A'D' = 1,92\ cm$

$C'D' = k \times CD$
$1,8 = 0,3 \times CD$
$CD = \dfrac{1,8}{0,3}$
$CD = 6\ cm$

Exercice n°2 :

$A'B'C'$ est l'image de ABC par une homothétie de centre E.
$AB = 3{,}2\ cm$, $AC = 6{,}4\ cm$, $A'B' = 8$ cm
1) Déterminer le rapport de l'homothétie.
2) Déterminer A'C'



Solution :

1) A'B'C' est un agrandissement de ABC.

$$k = \frac{A'B'}{AB}$$

$$k = \frac{8}{3,2}$$

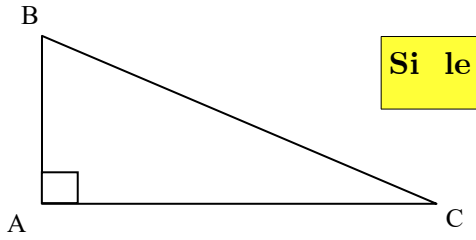
$k = 2,5$
Le rapport de l'homothétie est 2,5

2) $A'C' = k \times AC$
$A'C' = 2,5 \times 6,4$
$A'C' = 16\ cm$

Théorème de Pythagore

Énoncé du théorème

Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés

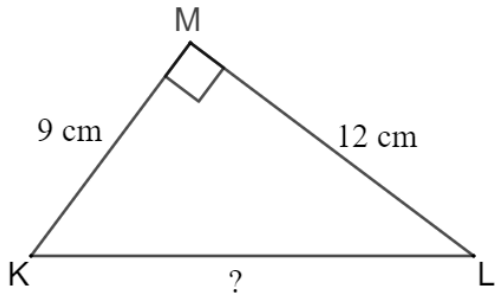


Si le triangle ABC est rectangle en A alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Exemples d'utilisation de l'énoncé de Pythagore

On connaît 2 côtés du triangle rectangle, il permet de calculer la longueur du troisième côté.

1) Déterminer la longueur de l'hypoténuse



KLM est un triangle rectangle en M

D'après le théorème de Pythagore :

$KL^2 = MK^2 + ML^2$

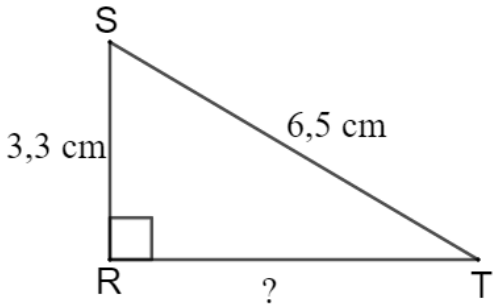
$KL^2 = 9^2 + 12^2$

$KL^2 = 225$

$KL = \sqrt{225}$

$KL = 15\ cm$

2) Déterminer la longueur d'un côté de l'angle droit



RST est un triangle rectangle en R

D'après le théorème de Pythagore :

$ST^2 = RS^2 + RT^2$

$6,5^2 = 3,3^2 + RT^2$

$RT^2 = 6,5^2 - 3,3^2$

$RT^2 = 31,36$

$RT = \sqrt{31,36}$

$RT = 5,6\ cm$

Démontrer qu'un triangle n'est pas rectangle

Soit ABC un triangle tel que AB=7 cm, AC=9 cm et BC = 6 cm

ABC est-il un triangle rectangle ?

$AC^2 = 9^2 = 81$
$AB^2 + BC^2 = 7^2 + 6^2 = 85$
On constate que $AC^2 \neq AB^2 + BC^2$

Donc l'égalité de Pythagore n'est pas vérifiée, ABC n'est pas un triangle rectangle

Démontrer qu'un triangle est rectangle

Soit IJK un triangle tel que IJ=17,5 cm, JK=42 cm et IK = 45,5 cm.

IJK est-il un triangle rectangle ?

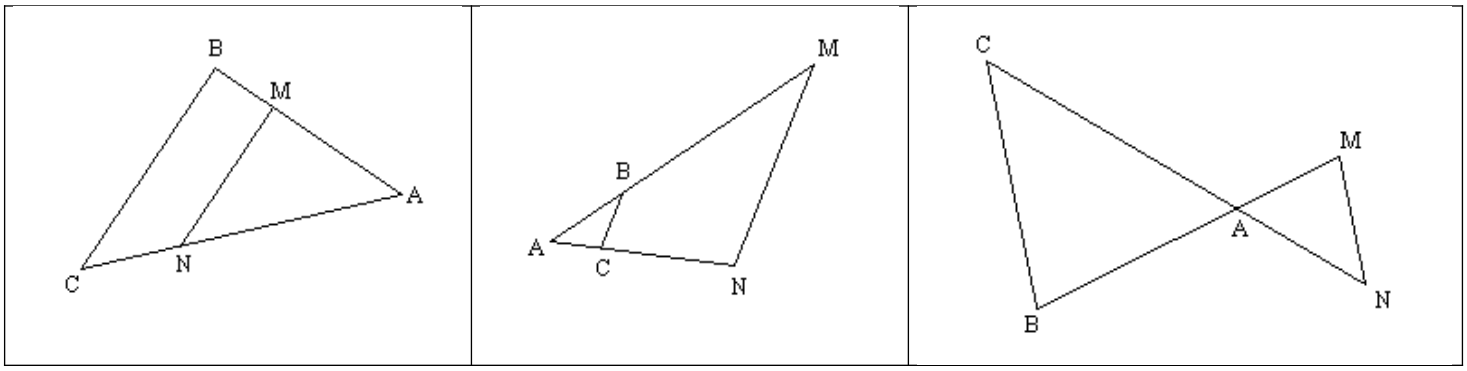
$IK^2 = 45,5^2 = 2070,25$
$IJ^2 + KJ^2 = 17,5^2 + 42^2 = 2070,25$
On constate que $IK^2 = IJ^2 + KJ^2$ donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore , IJK est un triangle rectangle en J

Le théorème de Thalès

Le théorème de Thalès

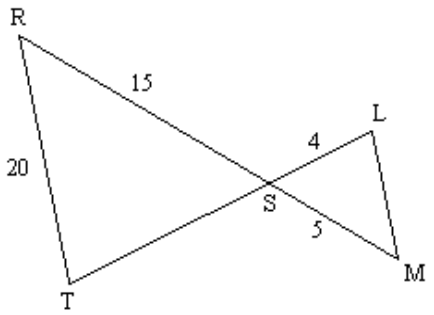
Soit deux droites d et d' sécantes en A.
Soient B et M deux points de d distincts de A.
Soient C et N deux points de d' distincts de A.
Si les droites (BC) et (MN) sont parallèles alors $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

Les trois cas de figures :



Dans ces trois cas les triangles ABC et AMN ont leurs côtés associés proportionnels.

Un exemple d'utilisation du théorème de Thalès



Sachant que les droites (RT) et (LM) sont parallèles, déterminer les longueurs ST et LM.

Dans les triangles R**S**T et LM**S**
Les droites (RM) et (LT) sécantes en **S**
les droites (RT) et (LM) sont parallèles
d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{SR}{SM} = \frac{ST}{SL} = \frac{RT}{LM}$$

$$\frac{15}{5} = \frac{ST}{4} = \frac{20}{LM}$$

$$\frac{15}{5} = \frac{ST}{4}$$

$$ST = \frac{15 \times 4}{5}$$

$$ST = 12\ cm$$

$$\frac{15}{5} = \frac{20}{LM}$$

$$LM = \frac{5 \times 20}{15}$$

$$LM = \frac{20}{3}$$

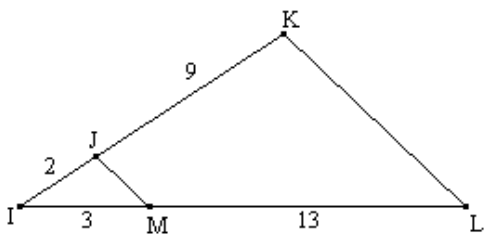
Déterminer si deux droites sont parallèles

La réciproque du théorème de Thalès

Soient deux droites d et d' sécantes en A.
Soient B et M deux points de d distincts de A.
Soient C et N deux points de d' distincts de A.

Si les points A, B, M d'une part et les points A, C, N d'autre part sont dans le même ordre et si $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN}$ alors les droites (BC) et (MN) sont parallèles

Deux exemples d'utilisation



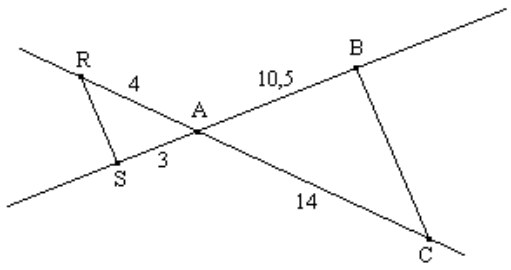
Les points **I**, J, K d'une part et **I**, M, L d'autre part sont alignés dans le même ordre.

Comparons les rapports $\frac{IJ}{IK}$ *et* $\frac{IM}{IL}$

$$\frac{IJ}{IK} = \frac{2}{11} = \frac{2 \times 16}{11 \times 16} = \frac{32}{176}$$

$$\frac{IM}{IL} = \frac{3}{16} = \frac{3 \times 11}{16 \times 11} = \frac{33}{176}$$

On constate que $\frac{IJ}{IK} \neq \frac{IM}{IL}$ par conséquent d'après la contraposée du théorème de Thalès, les droites (JM) et (KL) ne sont pas parallèles.



Les points R, **A**, C d'une part et S, **A**, B d'autre part sont alignés dans le même ordre.

Comparons les rapports $\frac{AR}{AC}$ *et* $\frac{AS}{AB}$

$$\frac{AR}{AC} = \frac{4}{14} = \frac{4 \times 10,5}{14 \times 10,5} = \frac{42}{147}$$

$$\frac{AS}{AB} = \frac{3}{10,5} = \frac{3 \times 14}{10,5 \times 14} = \frac{42}{147}$$

On a $\frac{AR}{AC} = \frac{AS}{AB}$ donc d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (RS) et (BC) sont parallèles.

Triangles semblables

Triangles semblables et angles

Définition :

Des triangles semblables sont des triangles qui ont leurs angles deux à deux de même mesure.

Propriété :

Si deux triangles ont deux angles deux à deux de même mesure, alors ces triangles sont semblables.

Exemple :

On a $\widehat{CAB} = \widehat{KIJ} = 40°$ et $\widehat{ABC} = \widehat{IKJ} = 60°$

Ces deux triangles ont deux angles deux à deux de même mesure donc ces 2 triangles sont semblables.

Les deux autres angles ont également la même mesure.
En effet, dans un triangle, la somme des mesures des angles est toujours égale à 180°.
Donc $\widehat{ACB} = 180 - (40 + 60) = 80°$ et $\widehat{IJK} = 180 - (40 + 60) = 80°$

Vocabulaire :

$\widehat{CAB} = \widehat{KIJ}$. $\widehat{CAB}$ *et* $\widehat{KIJ}$ sont des angles homologues.
$\widehat{ABC} = \widehat{IKJ}$. $\widehat{ABC}$ *et* $\widehat{IKJ}$ sont des angles homologues.
$\widehat{ACB} = \widehat{IJK}$. $\widehat{ACB}$ *et* $\widehat{IJK}$ sont des angles homologues.

B et K sont des sommets homologues.
A et I sont des sommets homologues.
C et J sont des sommets homologues.

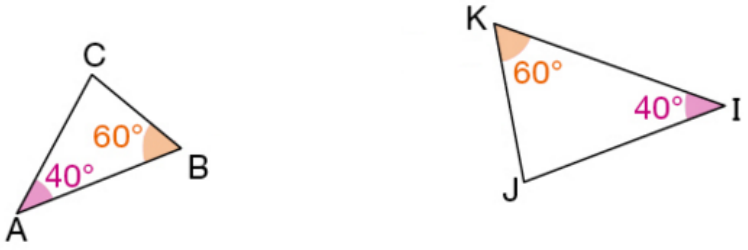
[AB] et [IK] sont des côtés homologues.
[AC] et [IJ] sont des côtés homologues.
[BC] et [KJ} sont des côtés homologues.

Triangles semblables et longueurs

Propriété :

Si deux triangles sont semblables, alors les longueurs de leurs côtés sont deux à deux proportionnelles.

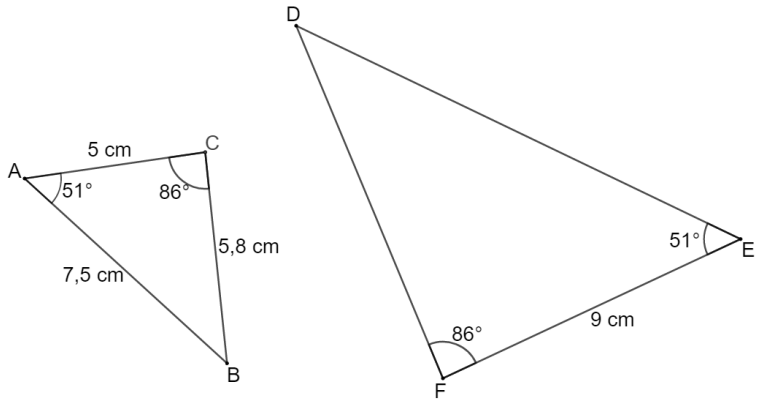
Exemple :
Reprenons nos deux triangles de l'exemple précédent :



Les triangles ABC et IJK sont semblables donc les longueurs de leurs côtés homologues sont deux à deux proportionnelles.

On a donc : $\dfrac{AB}{IK} = \dfrac{AC}{IJ} = \dfrac{BC}{KJ}$ ou $\dfrac{IK}{AB} = \dfrac{IJ}{AC} = \dfrac{KJ}{BC}$

Exercice résolu



1) Démontrer que les triangles ABC et DEF sont des triangles semblables

$\widehat{BAC} = \widehat{DEF}$ et $\widehat{ACB} = \widehat{DFE}$

ABC et DEF ont deux angles deux à deux de même mesure donc ces 2 triangles sont semblables.

2) Déterminer les longueurs DF et DE

Les triangles ABC et DEF sont semblables donc les longueurs de leurs côtés homologues sont deux à deux proportionnelles.

Déterminons leurs côtés homologues :
[AC] et [EF]
[BC] et [DF]
[BA] et [DE]

On a donc : $\dfrac{AC}{EF} = \dfrac{BC}{DF} = \dfrac{BA}{DE}$ Remplaçons les longueurs connues

$\dfrac{5}{9} = \dfrac{5,8}{DF} = \dfrac{7,5}{DE}$ Calculons...

$\dfrac{5}{9} = \dfrac{5,8}{DF}$

$5 \times DF = 9 \times 5,8$

$DF = \dfrac{9 \times 5,8}{5}$

$DF = 10,44\ cm$

$\dfrac{5}{9} = \dfrac{7,5}{DE}$

$5 \times DE = 9 \times 7\ ,5$

$DE = \dfrac{9 \times 7,5}{5}$

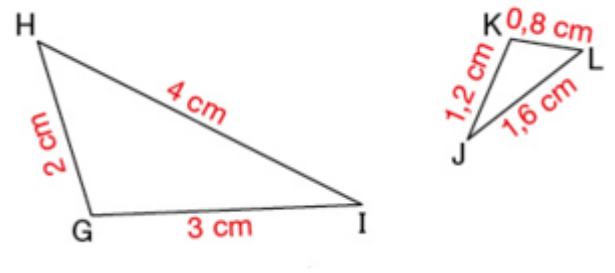
$DE = 13,5\ cm$

<u>Propriété :</u>

Si les longueurs des côtés de deux triangles sont deux à deux proportionnelles, alors ces triangles sont semblables.

Exercice résolu

Les triangles suivants sont-ils semblables ?



La première étape est de classer les longueurs des côtés par ordre croissant :

Triangle GHI	Triangle JKL
GH=2 cm	KL=0,8 cm
GI=3 cm	JK=1,2 cm
HI=4 cm	JL=1,6 cm

Comparons les rapports de longueurs :

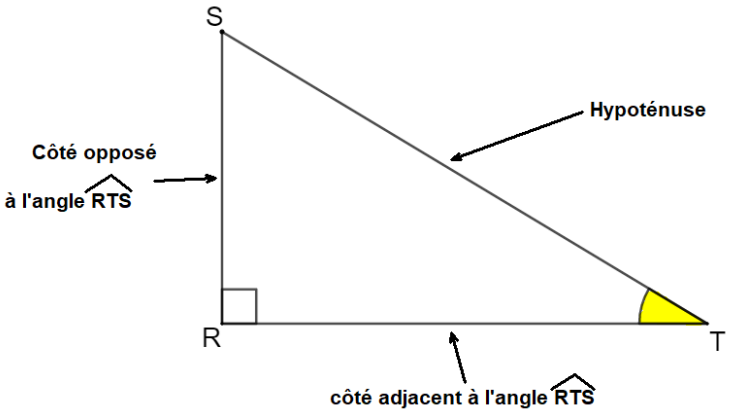
$\dfrac{GH}{KL} = \dfrac{2}{0,8} = 2,5$ $\dfrac{GI}{JK} = \dfrac{3}{1,2} = 2,5$ $\dfrac{HI}{JL} = \dfrac{4}{1,6} = 2,5$

Donc les triangles GHI et JKL sont des triangles semblables.
GHI est un agrandissement de JKL (coefficient $k = 2,5$)
JKL est une réduction de GHI (coefficient $k = \dfrac{1}{2,5} = 0,4$)

Trigonométrie

Vocabulaire

Un triangle rectangle est un triangle qui possède un angle droit.
L'hypoténuse est le côté situé en face de l'angle droit : [ST]
[RS] est **le côté opposé** à l'angle $\widehat{RTS}$
[RT] est **le côté adjacent** à l'angle $\widehat{RTS}$



Formules

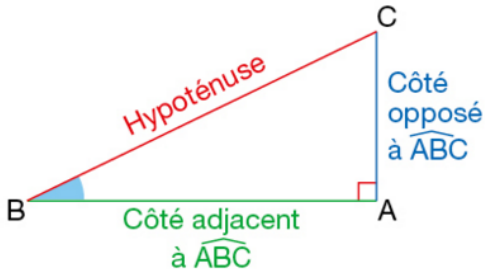
Définitions Dans un triangle rectangle,

- le **cosinus** d'un angle aigu est le quotient $\dfrac{\text{longueur du côté adjacent à cet angle}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$;
- le **sinus** d'un angle aigu est le quotient $\dfrac{\text{longueur du côté opposé à cet angle}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$;
- la **tangente** d'un angle aigu est le quotient $\dfrac{\text{longueur du côté opposé à cet angle}}{\text{longueur du côté adjacent à cet angle}}$.

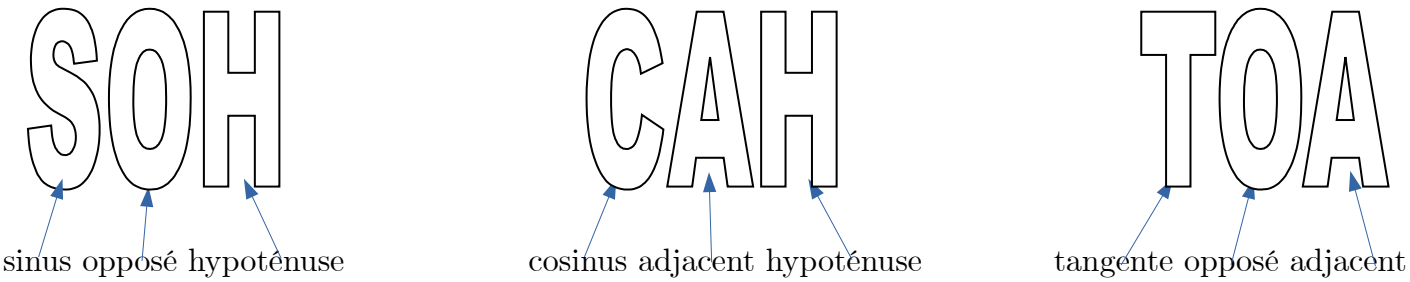
Dans un triangle ABC rectangle en A :

- $\cos \widehat{ABC} = \dfrac{AB}{BC}$ (lire « cosinus de $\widehat{ABC}$ »)
- $\sin \widehat{ABC} = \dfrac{AC}{BC}$ (lire « sinus de $\widehat{ABC}$ »)
- $\tan \widehat{ABC} = \dfrac{AC}{AB}$ (lire « tangente de $\widehat{ABC}$ »)

Remarque. Pour calculer ces rapports, les longueurs doivent être exprimées dans la même unité.

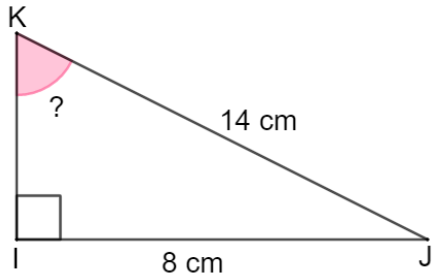


Pour retenir ces formules, il suffit de retenir SOH CAH TOA



Déterminer la mesure d'un angle

Exercice résolu n°1 :
Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{IKJ}$



IJK est un triangle rectangle en I
Hypoténuse : [**KJ**]
Côté opposé à $\widehat{IKJ}$: [**IJ**]
Côté adjacent à $\widehat{IKJ}$: [IK]

Dans cet exercice, je connais la longueur de l'hypoténuse et du côté opposé à $\widehat{IKJ}$.
Le côté adjacent à $\widehat{IKJ}$ ne m'intéresse pas. Je vais barrer le côté adjacent.

Pour cet exercice, il faut utiliser le sinus (seule formule non barrée).

$$sin\ \widehat{IKJ} = \frac{côté\ opposé\ à\ \widehat{IKJ}}{hypoténuse}$$

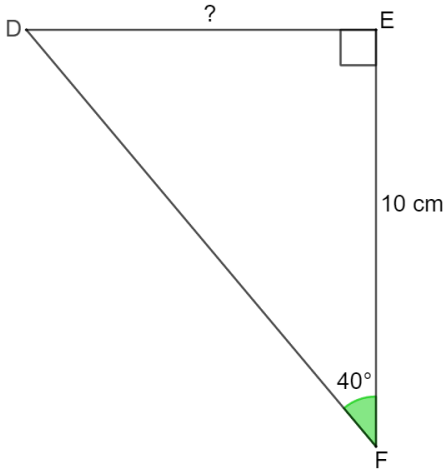
$$sin\ \widehat{IKJ} = \frac{IJ}{KJ}$$

$$sin\ \widehat{IKJ} = \frac{8}{14}$$

$\widehat{IKJ} \approx 34,8°$

Déterminer la longueur d'un côté

Exercice résolu n°2 :
Déterminer la longueur du côté [DE]



DEF est un triangle rectangle en E
Hypoténuse : [DF]
Côté opposé à $\widehat{EFD}$: [**DE**]
Côté adjacent à $\widehat{EFD}$: [**EF**]

Dans cet exercice, je connais la longueur du côté adjacent à $\widehat{EFD}$ et je cherche le côté opposé à $\widehat{EFD}$.
L'hypoténuse ne m'intéresse pas.
Je vais donc barrer l'hypoténuse .

Pour cet exercice, il faut utiliser la tangente (seule formule non barrée).

$$tan\ \widehat{EFD} = \frac{côté\ opposé\ à\ \widehat{EFD}}{côté\ adjacent\ à\ \widehat{EFD}}$$

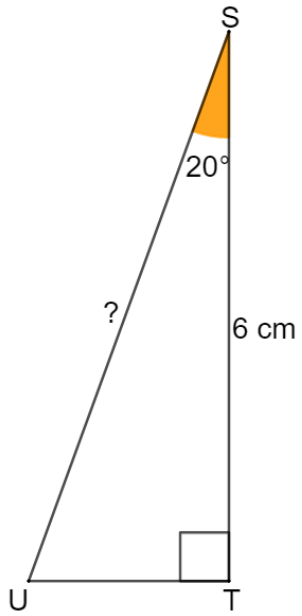
$$tan\ \widehat{EFD} = \frac{DE}{EF}$$ je remplace tout ce qui est connu ...

$$\tan 40° = \frac{DE}{10}$$ je multiplie...

$$DE = 10 \times tan\ 40$$

$$DE \approx 8,4\ cm$$

Exercice résolu n°3 :



STU est un triangle rectangle en T
Hypoténuse : [**SU**]
Côté opposé à $\widehat{UST}$: [TU]
Côté adjacent à $\widehat{UST}$: [**ST**]

Dans cet exercice, je connais la longueur du côté adjacent à $\widehat{UST}$ et je cherche l'hypoténuse.
Le côté opposé à $\widehat{UST}$ ne m'intéresse pas.
Je vais donc barrer le côté opposé à $\widehat{UST}$.

Pour cet exercice, il faut utiliser le cosinus (seule formule non barrée).

$$cos\ \widehat{UST} = \frac{côté\ adjacent\ à\ \widehat{UST}}{hypoténuse}$$

$$cos\ \widehat{UST} = \frac{ST}{SU}$$ je remplace tout ce qui est connu ...

$$\cos 20° = \frac{6}{SU}$$ cette fois-ci, on échange...

$$SU = \frac{6}{cos\ 20°}$$

$$SU \approx 6,4\ cm$$

Utiliser la calculatrice CASIO

La division euclidienne

Pour trouver le quotient et le reste de la division de 6837 par 13

$$\begin{array}{r|l} 6837 & 13 \\ \hline & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r|l} 6837 & 13 \\ \hline 12 & 525 \end{array}$$

On obtient : Quotient $= 525$ et reste $= 12$
On peut donc écrire : $6837 = 13 \times 525 + 12$

PI

Pour écrire π sur la calculatrice :

Exemple :

Calculer $2 \times \pi \times 7$

On obtient 14π

Pour avoir une valeur approchée, il faut appuyer sur la touche

Opérations sur les heures

$3\ h\ 45\ min + 6\ h\ 52\ min$

On obtient $10\ h\ 37\ min$

$5\ h\ 23\ min\ 15\ sec - 2\ h\ 40\ min$

On obtient $2\ h\ 43\ min\ 15\ sec$

Fractions

$\frac{4}{7}$

ou

$\frac{2}{5} + \frac{7}{9}$

On obtient $\frac{53}{45}$

$$\left(\frac{4}{9}-\frac{1}{4}\right)\times\frac{2}{5}$$

On obtient $\frac{7}{90}$

Puissances

2^3

On obtient 8

3^4+2^5

On obtient 113

$2,5\times10^4$

On obtient 25000

Écriture scientifique d'un nombre

42 500 000

On obtient $4,25\times10^7$

0,009

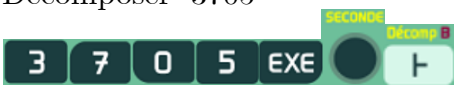
On obtient 9×10^{-3}

Décomposer un entier en un produit de facteurs premiers

Décomposer 480

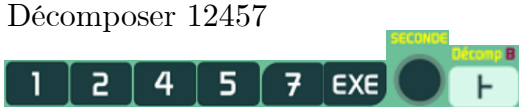
On obtient $2^5\times3\times5$ ou $2\times2\times2\times2\times2\times3\times5$

Décomposer 3705



On obtient $3\times5\times13\times19$

Décomposer 12457



On obtient 12457. C'est un nombre premier !!

Liste des diviseurs d'un nombre entier

Déterminer les diviseurs de 60

ou

Vous passez dans le menu tableau

Sur l'écran apparaît $f(x) =$

Il faut alors taper :

Sur certain modèle, il ne faut appuyer qu'une seule fois sur la touche EXE

Passons à la plage du tableau

Début : 1 Fin : 30 Pas : 1

Le tableau suivant apparaît :

	x	$f(x)$	
1	1	60	1×60
2	2	30	2×30
3	3	20	3×20
4	4	15	4×15
5	5	12	5×12
6	6	10	6×10
7	7	8,5714	NON !!!
8	8	7,5	NON !!!
9	9	6,666	NON !!!
10	10	6	10×6 STOP !!! déjà écrit. On ne va pas plus loin
11	11	5,4545	
12	12	5	
13	13	4,6153	
14	14	4,2857	
15	15	4	

... ...

On obtient donc :

$60 = 1 \times 60 = 2 \times 30 = 3 \times 20 = 4 \times 15 = 5 \times 12 = 6 \times 10$

Les diviseurs de 60 sont : 1 / 2 / 3 / 4 / 5 / 6 / 10 / 12 / 15 / 20 / 30 / 60

Pour revenir au mode calcul :

Valeur numérique d'une expression littérale

Déterminer la valeur numérique de $7x - 12$ pour $x = 17$

On obtient 107

On considère la fonction $f(x) = 3x^2 + 5x - 4$.
Déterminer $f(-8)$

On obtient $f(-8) = 148$